

Speciális esetek vizsgálata alapján azt sejtethjük, hogy a keresett R az E pontnak az e egyenesre vonatkozó tükörképe.

1987-12-447-1.eps

1. ábra

Legyen először a P pont k belsejében, de különbözzék O -tól. Használjuk az 1. ábra jelöléseit. Az EOQ egyenlő szárú háromszögben $OQP \sphericalangle = OEP \sphericalangle$, az e egyenesre vonatkozó szimmetria miatt pedig $ORP \sphericalangle = OEP \sphericalangle$. Az OP szakasz tehát ugyanakkora szögben látszik a Q -ból és az R -ből. Mivel a Q és az R az OP egyenesnek ugyanazon a partján van, az O , P , Q és R pontok valóban egy körön vannak.

Nézzük ezután azt az esetet, amikor a P pont a k körön kívül van. Az előbbiekhöz hasonlóan a 2/a ábra α -val jelölt szögei most is egyenlők, ezért $OQP \sphericalangle = 180^\circ - \alpha$. Az $OPQR$ négyszög tehát most is húrnégyszög.

1987-12-447-2.eps

2.a ábra

1987-12-447-3.eps

2.b ábra

Ha E a P és a Q között van (2/b ábra), akkor ha $OQE \sphericalangle = \alpha$, akkor $ORP \sphericalangle = 180^\circ - \alpha$, és így $OPQR$ most is húrnégyszög.

Hátravan még a következő három speciális eset vizsgálata:

a) P egybeesik O -val. Ekkor a P , Q , R pontok egy körön vannak, vagy azért, mert Q is egybeesik R -rel (3/a ábra), vagy pedig azért, mert P , Q , és R nem esnek egy egyenesre (3/b ábra).

1987-12-447-4.eps

3.a ábra

1987-12-447-5.eps

3.b ábra

b) P a k kör területén van. Ha magát a P pontot tekintjük a PE szelő és a kör második metszéspontjának, akkor $P \equiv Q$ miatt O , P , Q és R most is egy körön vannak.

c) A PE egyenes a kör érintője. Ekkor E azonos Q -val, $OEP \sphericalangle$ derékszög, és Thalész tétele szerint O , P , Q és R most is egy körön vannak (4. ábra).

1987-12-448-1.eps

4. ábra

Ezzel megmutattuk, hogy O , P , Q és az E -nek az e egyenesre vonatkozó tükörképe a P minden lehetséges helyzetében egy körön vannak.