

Előre kell bocsátanunk, hogy a feladat kitűzésekor az egyenlőtlenség iránya hibásan, fordítva jelent meg.

*

(A feladat helyesen:

Bizonyítsuk be, hogy ha $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitív valós számok, akkor

$$\frac{1}{\frac{1}{1+a_1} + \frac{1}{1+a_2} + \dots + \frac{1}{1+a_n}} - \frac{1}{\frac{1}{a_1} + \frac{1}{a_2} + \dots + \frac{1}{a_n}} \geq \frac{1}{n}.)$$

*

A megoldáshoz egy ismert Csebisev-féle egyenlőtlenséget használunk fel.

Ha $b_1, b_2, \dots, b_n$ valamint $c_1, c_2, \dots, c_n$ a valós számoknak két, egyformán rendezett sorozata (azaz mindkettő növekvő, vagy mindkettő csökkenő), akkor az egyes sorozatok számtani középértékeinek szorzata legfeljebb akkora, mint a megfelelő elemek szorzatainak számtani középértéke, vagyis

$$\frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \cdot \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_n}{n} \leq \frac{b_1 c_1 + b_2 c_2 + \dots + b_n c_n}{n}.$$

(Bizonyítása megtalálható pl. a Matematikai versenytételek II. Rész 45. oldalán, Középiskolai Szakköri Füzetek.)

A feladatban szereplő $a_1, a_2, \dots, a_n$ pozitív valós számok sorrendjének nincs kitüntetett szerepe, ezért az általánosság megszorítása nélkül előírhatjuk, hogy $a_1 \geq a_2 \geq \dots \geq a_n > 0$ teljesüljön.

Legyen $b_i = \frac{1}{a_i}$ és $c_i = \frac{1}{1+a_i}$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Ekkor nyilván $b_1 \leq b_2 \leq \dots \leq b_n$ és $c_1 \leq c_2 \leq \dots \leq c_n$, ezért a Csebisev-féle egyenlőtlenség fennáll ezekre a mennyiségekre. A bizonyítás most már azon múlik, hogy esetünkben $b_i c_i = b_i - c_i$ ($i = 1, 2, \dots, n$). Ennek alapján

$$\frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} \cdot \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_n}{n} \leq \frac{b_1 + b_2 + \dots + b_n}{n} - \frac{c_1 + c_2 + \dots + c_n}{n}.$$

A kapott egyenlőtlenség mindkét oldalát a pozitív

$$\frac{(b_1 + b_2 + \dots + b_n)(c_1 + c_2 + \dots + c_n)}{n} - \text{nel}$$

elosztva éppen a bizonyítandó állítást kapjuk.

A Csebisev-féle egyenlőtlenség levezetésének ismeretében azt is megállapíthatjuk, hogy egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn a két oldal között, ha $a_1 = a_2 = \dots = a_n$.

Megjegyzés. Egy hibás állítást elintézhetünk egyetlen ellenpéldával, a megoldók zöme azonban nem érte be ennyivel, hanem rájött a hiba mibenlétére, és a helyes állítást be is bizonyította. Ők dolgozatukra a maximális pontszámot kapták. A csupán ellenpéldát beküldők munkáját 2 pontra értékeltük. Második megoldással az 5 pont mellé további két pontot lehetett szerezni.