

E feladat kitűzésekor, lapunk 1987/4. számában jelent meg a *Sokszögek a gömbön* című cikk. A megoldás során felhasználjuk az ott leírtakat.

1987-11-378-1.eps

Legyenek a gömbi négyszög csúcsai A, B, C, D , a gömb középpontja pedig O . Ha az A, B, C, D pontok egy főkörön vannak, a feladat állítása nyilvánvaló, hiszen ekkor a gömbi négyszög minden szöge π . Tegyük föl ezután, hogy az A, B, C, D pontokat tartalmazó kör nem főkör, és legyen a középpontja K . Az O kezdőpontú OK félegyenes messe a gömböt P -ben. Mivel OK merőleges a négyszög csúcsait tartalmazó síkra, $\widehat{PA} = \widehat{PB} = \widehat{PC} = \widehat{PD}$. Ezért pl. a PAB gömbháromszög egyenlő szárú. Az egyenlő szárakkal szemben gömbháromszögben is egyenlő szögek vannak, amit itt abból láthatunk, hogy az OP -re illeszkedő, AB -re merőleges sík a gömbháromszög szimmetriasíkja. Így $\angle PAB = \angle PBA$. Jelöljük ezt a szöveget α -val. Hasonló igaz az ábrán β, γ, δ -val jelölt szögekre. Tekintsük ezután az A -val a gömbön átellenes A' pontot. Mivel az A és D , valamint az A és P , továbbá az A és B pontokon átmenő főkörök mindegyike átmegy az A' ponton, a cikkben mondott szögdefiníció szerint a gömbi négyszög A -nál lévő szöge $\alpha + \delta$. Hasonlót mondhatunk a másik három csúcsnál lévő szögekről. Így a gömbi négyszög bármelyik két szemközti szögének összege $\alpha + \beta + \gamma + \delta$, tehát igaz a feladat állítása.