

I. megoldás. Jelöljük a szabályos háromszög oldalát a -val, az XAB szöget pedig α -val (1. ábra).

1987-11-376-1.eps

1. ábra

Ekkor $YAD \sphericalangle = 30^\circ - \alpha$ és $YXC \sphericalangle = 30^\circ + \alpha$. Az ábra derékszögű háromszögeiből:

$$\begin{aligned} AB &= a \cdot \cos \alpha, & AD &= a \cdot \cos(30^\circ - \alpha) \\ \text{és} & & XC &= a \cdot \cos(30^\circ + \alpha). \end{aligned}$$

A téglalapról megmaradó három derékszögű háromszög területe így

$$\begin{aligned} t_{ABX} &= \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha, \\ t_{ADY} &= \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \cos(30^\circ - \alpha) \cdot \sin(30^\circ - \alpha), \\ t_{XCY} &= \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \cos(30^\circ + \alpha) \cdot \sin(30^\circ + \alpha). \end{aligned}$$

Bebizonyítjuk, hogy az első két terület összege ugyanannyi, mint a harmadik.

$$\begin{aligned} t_{ABX} + t_{ADY} &= \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \cos \alpha \cdot \sin \alpha + \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \cos(30^\circ - \alpha) \cdot \sin(30^\circ - \alpha) = \\ &= \frac{1}{4} \cdot a^2 [\sin 2\alpha + \sin(60^\circ - 2\alpha)] = \frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot 2 \cdot \sin 30^\circ \cdot \cos(30^\circ - 2\alpha), \end{aligned}$$

ahol az utolsó lépésben fölhasználtuk a $\sin x + \sin y = 2 \cdot \sin \frac{x+y}{2} \cdot \cos \frac{x-y}{2}$ azonosságot. Figyelembe véve, hogy $\cos(30^\circ - 2\alpha) = \sin(60^\circ + 2\alpha)$, a területek összegére kapott előbbi kifejezésünk így alakul:

$$t_{ABX} + t_{ADY} = \frac{1}{4} \cdot a^2 \cdot \sin(60^\circ + 2\alpha) = \frac{1}{2} \cdot a^2 \cdot \sin(30^\circ + \alpha) \cdot \cos(30^\circ + \alpha),$$

ami valóban az XCY háromszög területe. Ezzel a feladat állítását bebizonyítottuk.

II. megoldás. Ismét azt mutatjuk meg, hogy az XCY háromszög területe egyenlő az ABX és ADY háromszögek területének összegével. E derékszögű háromszögek átfogója egyenlő, ezért elegendő belátni, hogy az utóbbi két háromszögben az átfogóhoz tartozó magasságok összege az XCY háromszög átfogóhoz tartozó magasságával egyenlő.

Forgassuk el az ADY háromszöget az Y , az ABX háromszöget pedig az X csúcsa körül 60° -kal úgy, hogy az előbbi háromszög AY , az utóbbinak pedig az AX oldala menjen át az XY oldalba. Az egyes elforgatások után a D és a B képe legyen D' illetve B' (1. ábra).

Az elforgatott háromszögek derékszögű csúcsa, a D' és a B' rajta van az XY szakasz Thalész-körén, csakúgy mint a C csúcs, ezért a $CD'B'$ háromszög körülírt körének középpontja az XY szakasz O felezőpontja. Megmutatjuk, hogy O ennek a háromszögnek súlypontja is, vagyis a háromszög szabályos.

A 60° -os elforgatás miatt $D'YC \sphericalangle = 120^\circ$, a $CYD'B'$ húrnégyszögben tehát $CB'D' \sphericalangle = 60^\circ$ valóban, és hasonlóan kapjuk, hogy $CD'B' \sphericalangle = 60^\circ$.

1987-11-377-1.eps

2. ábra

Tekintsük ezután a $CD'B'$ háromszöget a súlypontján áthaladó XY egyenessel, és használjuk a 2. ábra jelöléseit. Ezen az ábrán m_1 az XYD' háromszög átfogóhoz tartozó magassága, m_2 és m pedig ugyanilyen magasság az XYB' , illetve az XYC háromszögben. A bevezetőkben mondottak szerint azt kell megmutatnunk, hogy

$$(1) \quad m = m_1 + m_2.$$

Az ábráról leolvasható, hogy a $B'T_2T_1D'$ trapéz középvonala,

$$(2) \quad FG = \frac{m_1 + m}{2}.$$

Az $FGO \sim CTO$ hasonlóságból:

$$m : FG = OC : FO,$$

s mivel a jobb oldal 2 – hiszen O súlypont –

$$(3) \quad m = 2FG.$$

(2) és (3)-ból következik (1), amit bizonyítani akartunk.

Megjegyzés. Fölmerülhet a kérdés, vajon mely téglalapokból vágható ki a feladat követelményei szerinti szabályos háromszög. Világos, hogy α -ra $0 \leq \alpha \leq 30^\circ$, azaz $0 \leq \operatorname{tg} \alpha \leq \frac{1}{\sqrt{3}}$. A téglalap oldalainak aránya

$$\frac{AD}{AB} = \frac{a \cdot \cos(30^\circ - \alpha)}{a \cdot \cos \alpha} = \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2} \cdot \operatorname{tg} \alpha,$$

vagyis a

$$\frac{\sqrt{3}}{2} \leq \frac{AD}{AB} \leq \frac{\sqrt{3}}{2} + \frac{1}{2}\sqrt{3} = \frac{2}{\sqrt{3}}$$

egyenlőtlenségnek kell teljesülnie.