(1)-ben x helyébe rendre 1-et, -1-et, $\frac{1}{2}$-et és $-\frac{1}{2}$-et helyettesítve a következő egyenlőtlenségeket írhatjuk fel:

$$(*)\qquad \begin{aligned} -1 &\le a+b+c+d \le 1,\\ -1 &\le a-b+c-d \le 1,\\ -1 &\le -\frac{a}{8}-\frac{b}{4}-\frac{c}{2}-d \le 1,\\ -1 &\le -\frac{a}{8}+\frac{b}{4}-\frac{c}{2}+d \le 1. \end{aligned}$$

Az első két egyenlőtlenség megfelelő oldalait összeadva és kettővel osztva a

$$(3)\qquad -1 \leqq a+c \le 1,$$

a harmadik és a negyedik egyenlőtlenség megfelelő oldalait összeadva és néggyel szorozva pedig a

$$(4)\qquad -8 \le -a-4c \le 8$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Az első és harmadik egyenlőtlenség összegét nyolccal szorozva a

$$(5)\qquad -16 \le 7a+6b+4c \le 16,$$

(3)-at és (4)-et összeadva és hárommal osztva a

$$(6)\qquad -3 \le -c \le 3,$$

(3) négyszeresét (4)-hez adva majd hárommal osztva a

$$(7)\qquad -4 \le a \le 4,$$

végül (4) és (5) összegét hattal osztva a

$$(8)\qquad -4 \le a+b \le 4$$

egyenlőtlenséget kapjuk.

Az $f(x) = 3ax^2 + 2bx + c$ függvény képe egyenes vagy parabola attól függően, hogy a értéke 0, vagy sem. Az általánosság megsértése nélkül feltehetjük, hogy $a \ge 0$. Ekkor a függvény konvex, és ha $a \ne 0$, akkor az $x = \frac{-b}{3a}$ helyen minimuma van.

Most két esetet különböztetünk meg aszerint, hogy ez a minimumhely kívül esik-e a $[-1;\, 1]$ intervallumon, vagy sem.

Az első esetben – valamint ha $a = 0$, amikor is nem létezik minimum – az f monoton a $[-1;\, 1]$ intervallumban, így szélsőértékeit az intervallum végpontjaiban veszi fel. Az $|3ax^2+2bx+c|$ függvény tehát ebben az intervallumban szintén valamelyik végpontban veszi fel a maximumát, így elég belátnunk, hogy (2) fennáll a $[-1;\, 1]$ intervallum végpontjaiban, azaz

$$|3a+2b+c| \le 9 \quad \text{és} \quad |3a-2b+c| \le 9.$$

Ha a (8) egyenlőtlenség kétszeresét hozzáadjuk a (3) egyenlőtlenséghez, akkor éppen az első bizonyítandó egyenlőtlenséget kapjuk :

$$-9 \le 3a+2b+c \le 9.$$

A (-1)-beli érték becsléséhez előbb adjuk össze a megoldás elején felírt második és negyedik egyenlőtlenséget. Az eredményt nyolccal szorozva az (5)-höz hasonló

$$(5')\qquad -16 \le 7a-6b+4c \le 16$$

egyenlőtlenséghez jutunk. Ezt (4)-hez adva és egyszerűsítve kapjuk, hogy

$$(8')\qquad -4 \le a-b \le 4.$$

Most ennek kétszereséhez adva a (3) egyenlőtlenséget, éppen a kívánt összefüggéshez jutunk:

$$-9 \le 3a-2b+c \le 9.$$

Az az eset maradt még hátra, amikor $a > 0$ és a parabola csúcsa, tehát az $x = -\frac{b}{3a}$ hely a $[-1;\, 1]$ intervallumba esik. Függvényünk ekkor továbbra is a $[-1;\, 1]$ intervallum valamelyik végpontjában veszi föl a maximumát, a minimumát viszont a $\dfrac{-b}{3a}$ helyen. Az $|3ax^2+2bx+c|$ függvény maximuma tehát vagy $|3a+2b+c|$, vagy $|3a-2b+c|$ $(x=1$, ill. $x=-1)$, vagy pedig $\left|c-\dfrac{b^2}{3a}\right|$ $\left(x=-\dfrac{b}{3a}\right)$. Az első két értékről már láttuk, hogy nem nagyobbak 9-nél, meg kell még mutatnunk, hogy ez a harmadikra is igaz.

Nyilvánvaló, hogy $\left|c-\dfrac{b^2}{3a}\right| \le |c|+|b|\cdot\left|\dfrac{b}{3a}\right| \le |c|+|b|$ (felhasználtuk, hogy $-\dfrac{b}{3a}$ a $[-1;\,1]$ intervallumban van). Itt $|c|\le 3$ (6) szerint, míg

$$|b|=\left|\frac{(a+b)-(a-b)}{2}\right| \le \frac{1}{2}|a+b|+\frac{1}{2}|a-b| \le 4.$$

(Az utóbbi egyenlőtlenség (8) és (8') összege.) Innen pedig a bizonyítandónál erősebb $\left|c-\dfrac{b^2}{3a}\right| \le |c|+|b| \le 7$ egyenlőtlenség adódik.

Beláttuk tehát, hogy ha (1) igaz, akkor az $f(x)=3ax^2+2bx+c$ függvény maximum- és minimumhelyein a függvény abszolút értéke soha nem haladja meg a 9-et, ebből pedig a feladat állítása már következik.

Könnyen látható az is, hogy $|3ax^2+2bx+c|=9$ csak az intervallum végpontjaiban állhat fenn, s ehhez szükséges, hogy a (7) egyenlőtlenségben $|a|=4$, a (3) egyenlőtlenségben pedig $|a+c|=1$ teljesüljön, végül (8)-ban vagy (8')-ben is egyenlőség álljon. Innen a következő lehetőségek adódnak:

$$a=4, \qquad c=-3, \qquad b=0, \quad \text{vagy}$$
$$a=-4, \qquad c=3, \qquad b=0.$$

Végül $|a+b+c+d|\le 1$ és $|a-b+c-d|\le 1$ miatt d csak 0 lehet. A feladat állítása tehát csak a $4x^3-3x$ (az ún. harmadfokú Csebisev-polinom) és annak ellentettje, a $-4x^3+3x$ polinom esetén lehet éles, feltéve, hogy fennáll rájuk az (1) egyenlőtlenség. Ezt is ellenőrizhetjük: ha x a $[-1;\,1]$ intervallumba esik, akkor van olyan t, amelyre $x=\cos\, t$, s erre a t-re $4x^3-3x=4\cos^3 t-3\cos\, t=\cos\, 3t$, ennek abszolút értéke pedig valóban legföljebb 1. A feladat állítása tehát éles; a $4x^3-3x$ és a $-4x^3+3x$ teljesíti (1)-et, s ha x értéke 1 vagy -1, akkor (2)-ben valóban egyenlőség áll.