Az (1) bal oldalán lévő tagokban térjünk át tetszőleges, 1-nél nagyobb alapú logaritmusra és jelöljük ezt a „log” szimbólummal.

Ekkor a következő, az (1)-gyel ekvivalens egyenlőtlenséget kapjuk:

$$\frac{\log a}{\log(b+c)} + \frac{\log b}{\log(c+a)} + \frac{\log c}{\log(a+b)} \geqq \frac{3}{2}. \tag{2}$$

Ennek igazolásához fölhasználhatjuk a következő egyszerű tényt: ha $x \geqq 2$ és $y \geqq 2$, akkor $xy \geqq x+y$. Ez valóban igaz, hiszen

$$xy - x - y + 1 \geqq 1$$

azonnal látszik az

$$(x-1)(y-1) \geqq 1$$

alakból.

Ezt fölhasználva a (2) bal oldalát csökkentjük, ha a nevezőkben az összegek helyett a tagok szorzatát írjuk. Elegendő tehát azt megmutatni, hogy

$$\frac{\log\ a}{\log\ bc} + \frac{\log\ b}{\log\ ca} + \frac{\log\ c}{\log\ ab} \geqq \frac{3}{2},$$

vagy

$$\frac{\log\ a}{\log\ b + \log\ c} + \frac{\log\ b}{\log\ c + \log\ a} + \frac{\log\ c}{\log\ a + \log\ b} \geqq \frac{3}{2}.$$

Vezessük be a $\log\ a = A$, $\log\ b = B$, $\log\ c = C$ jelöléseket. Ekkor a bizonyítandó állítás a következő alakot ölti:

$$\frac{A}{B+C} + \frac{B}{C+A} + \frac{C}{A+B} \geqq \frac{3}{2}, \tag{3}$$

ahol A, B és C tetszőleges pozitív számok.

Legyen ezután

$$\begin{aligned} B + C &= x \\ C + A &= y \\ A + B &= z. \end{aligned}$$

Ezt a három egyenletet összeadva: $2A + 2B + 2C = x + y + z$, ahonnan az első egyenletet fölhasználva: $2A + 2x = x + y + z$, és így

$$A = \frac{1}{2}(-x + y + z)$$

adódik.

Hasonlóan kapjuk, hogy $B = \frac{1}{2}(x - y + z)$ és $C = \frac{1}{2}(x + y - z)$.

Ezután (3) így alakul:

$$\frac{1}{2} \cdot \frac{-x+y+z}{x} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x-y+z}{y} + \frac{1}{2} \cdot \frac{x+y-z}{z} \geqq \frac{3}{2}.$$

Mindkét oldalt 2-vel szorozva és alkalmasan csoportosítva:

$$\left(\frac{x}{y} + \frac{y}{x}\right) + \left(\frac{x}{z} + \frac{z}{x}\right) + \left(\frac{y}{z} + \frac{z}{y}\right) \geqq 6$$

adódik, ami már nyilvánvaló, hiszen x, y, z pozitív számok, és így pl.

$$\frac{x}{y} + \frac{y}{x} \geqq 2,$$

ami jól ismert helyes egyenlőtlenség.

A jelölésekre visszatekintve azt is látjuk, hogy egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $a = b = c = 2$.

Dienes János (Miskolc, Földes Ferenc Gimn., III. o .t.)