

I. megoldás. Jelöljük a gráf négy harmadfokú pontját az ábrán látható módon A , B , C és D -vel. Legyen E_1 az A és C -vel, E_2 pedig a B és D -vel összekötött másodfokú pont.

1987-11-373-1.eps

Az olyan leképezést, amely egy gráf csúcsait csúcsokba, éleit élekbe képezi le, a gráf *izomorfájának* nevezzük. Az ilyen izomorfának nyilván megvannak a következő tulajdonságai:

1. Különböző csúcsokat különböző csúcsokba visz, különben a kép-gráfnak kevesebb csúcsa volna, mint az eredetinek.
2. Különböző éleket különböző élekbe visz, ez következik az előző tulajdonságból.
3. „Nem-élt” is „nem-élbe” visz (ha két pont nincs összekötve, akkor képeik sem lehetnek összekötve, különben a kép-gráfnak több éle volna, mint az eredetinek.)
4. Fokszám-tartó (a pontnak és képének foka megegyezik).
5. Ha egy e él egy d és egy d' -fokú pontot köt össze, akkor e képe is egy d és egy d' -fokú pontot köt össze.
6. Ha egy pontnak k szomszédja van, s ezek rendre $d_1, d_2, \dots, d_k$ -fokúak, akkor a pont képének is k szomszédja van, s ezek is rendre $d_1, d_2, \dots, d_k$ -fokúak.

Mármost 4. miatt A képe a mi gráfunkban csak A , B , C vagy D lehet.

5. miatt az AD él képe csak AD vagy BC lehet, mert csak ez a két él köt össze harmadfokú pontokat.

6. miatt E_1 képe csak E_1 vagy E_2 lehet, mert csak e két olyan másodfokú pont van, amelynek mindkét szomszédja harmadfokú.

E három észrevétel alapján megmutatjuk, hogy gráfunk izomorfiait egyértelműen meghatározza az, hogy mi az A képe.

I. eset. A képe önmaga. Ekkor az AD él képe is A -ból induló él, tehát az AD él képe is önmaga, így D képe is önmaga. E_1 képe szomszédja A képének, azaz A -nak, így E_1 képe nem lehet E_2 . Tehát E_1 képe is önmaga. 1. miatt E_2 képe már nem lehet E_1 , így E_2 képe is önmaga. C képe szomszédja E_1 képének, azaz E_1 -nek, tehát C képe A vagy C . De A már „foglalt”, így 1. miatt C képe is önmaga. A CD él is helyén marad (2. miatt nem mehet át a már foglalt AD élbe), így D képe is önmaga. Végül nyilván helyén marad az A és B között futó háromélű út és a C és D között futó háromélű út is. Ez az izomorfia tehát azonosság (minden pont helyben marad).

II. eset. A képe D . Ekkor az AD él helyben marad ugyan (BC -be nem mehet), de megfordul: D képe A lesz. E_1 képe szomszédja A képének, D -nek, így E_1 képe E_2 . 1. miatt E_2 képe nem lehet E_2 , tehát E_2 képe csak E_1 lehet. C képe szomszédja E_1 képének, tehát E_2 -nek, így C képe vagy D vagy B . De D már foglalt, így 1. miatt C képe B . A BC él is megfordul tehát: B képe C . Végül helyet cserél az A és B , illetve a D és C között futó háromélű út is. Az izomorfia tehát most is egyértelműen meghatározza A képe. (A kapott leképezés valóban izomorfia.)

III. eset. A képe B . Ekkor az AD él képe csak a BC él lehet, így D képe C . E_1 képe szomszédja A képének, azaz B -nek, így csak E_2 lehet. E_2 képe tehát csak E_1 lehet (E_2 már foglalt). C képe szomszédja E_1 képének, E_2 -nek, tehát C képe vagy B , vagy D . De B már foglalt, így 1. miatt C képe D . B képe már csak A lehet. Az A és B között futó háromélű út most „megfordul”, a két belső pontja helyet cserél, és ugyanez történik a C és D között futó háromélű úttal is. A kapott leképezés tehát izomorfia, és A képe egyértelműen meghatározza.

IV. eset. A képe C . Ekkor az AD él képe a BC él, így D képe B . E_1 képe szomszédja A képének, C -nek, így nem lehet E_2 , csak E_1 . E_2 képe 1. miatt nem lehet E_1 , csak E_2 , így E_1 és E_2 önmagukba mennek át. De ekkor C képe szomszédja E_1 -nek, tehát csak C vagy A lehet, ám C már foglalt, így C képe A . Hasonlóan B képe D . A C és D közt futó háromélű út most átmegegyezik az A és B közt futó háromélű útba, és viszont. Így ismét egyértelműen meghatározott izomorfiait kaptunk.

A gráfnak tehát négy izomorfiaja van.

II. megoldás. Tekintsük a harmadfokú A , B , C és D pontokat. Ezek között hat, harmadik harmadfokú pontot nem érintő út halad: két él, két kétélű út és két háromélű út. Nyilvánvaló, hogy a két él, a két kétélű út, illetve a két háromélű út csak egymással cserélhető ki. A gráf tehát ugyanúgy viselkedik, mint egy négycsúcsú teljes gráf, amelynek AB és CD éle fehér, AC és BD éle fekete, AD és BC éle pedig kék.

A leképezés során most nyilván azt írjuk elő, hogy minden él színe egyezze meg a kép-él színével, azaz AB képe csak AB vagy CD , AC képe csak AC vagy BD , AD képe pedig csak AD vagy BC lehet. Ha tehát rögzítjük A képét, akkor ez meghatározza, hogy mi lesz az A -ból induló három különböző színű él képe, s így B , C és D képe is egyértelműen meghatározott. Így négy leképezést kapunk, és könnyen ellenőrizhető, hogy mind a négy leképezés valóban izomorfia (lásd a táblázatot).

A	AB	AC	AD	B	C	D
A	AB	AC	AD	B	C	D
B	BA	BD	BC	A	D	C
C	CD	CA	CB	D	A	B
D	DC	DB	DA	C	B	A