

I. megoldás. Az $1, 2, \dots, 120$ számok mindegyikét ötször írhatjuk be, tehát e számok összesen 600 mezőt fednek le. Másrészt minden olyan mezőt e számokkal kell lefednünk, amelyekre soruk és oszlopuk sorszámát összeszorozva 120 -nál nem nagyobb számot kapunk. Az első sorban 120 ilyen mező van, a másodikban $\frac{120}{2} = 60$, a harmadikban $\frac{120}{3}$, \dots , az i -edik sorban $\left[\frac{120}{i} \right]$ olyan mező van, amely megfelel (ha az oszlop száma m , akkor $im \leq 120$ -nak kell teljesülnie). Az összes ilyen mezők száma tehát $\sum_{i=1}^{120} \left[\frac{120}{i} \right] = 602$.

Ezek szerint több mezőt kell 120 -nál nem nagyobb számokkal lefednünk, mint ahány szám a lefedésre rendelkezésünkre áll, így a táblázat nem tölthető ki a feladat kívánalmainak megfelelően. (Már egy 120×120 -as táblázat sem tölthető ki az 1 -től 2880 -ig terjedő egészekkel.)

II. megoldás. Általánosabban azt mutatjuk meg, hogy ha $n \geq e^{k+1}$, akkor egy $n \times n$ -es táblázat nem tölthető ki az $1, 2, \dots, \frac{n^2}{k}$ számokkal az előírt módon úgy, hogy minden számot k -szor használunk fel. (Feltesszük, hogy k osztója n -nek.)

Megint felhasználjuk, hogy az első n szám valamelyikével kell lefednünk minden olyan mezőt, amelyre sorának és oszlopának sorszámát összeszorozva n -nél nem nagyobb számot kapunk. Ilyen mező az első sorban n darab, a másodikban $\left[\frac{n}{2} \right]$, \dots , az i -edik sorban $\left[\frac{n}{i} \right]$ darab van. Összesen tehát $\sum_{i=1}^n \left[\frac{n}{i} \right]$ ilyen mezőt kell lefednünk az n -nél nem nagyobb számokkal.

Mivel $[x] > x - 1$, tehát $\sum_{i=1}^n \left[\frac{n}{i} \right] > \sum_{i=1}^n \left(\frac{n}{i} - 1 \right) = n \sum_{i=1}^n \left(\frac{1}{i} \right) - n$. Ismeretes, hogy $\sum_{i=1}^n \frac{1}{i} > \ln n$, vagyis azoknak a mezőknek a száma, amelyeket az $1, 2, \dots, n$ számok valamelyikével kell lefednünk, nagyobb, mint $n(\ln n - 1)$. Másrészt e számok mindegyikét pontosan k -szor használhatjuk, így $k \cdot n$ mezőt fedhetünk le velük. Ahhoz, hogy a kitöltés megvalósítható legyen, szükséges (de nem elégséges!) tehát, hogy $kn > n(\ln n - 1)$, azaz $k + 1 > \ln n$, $n < e^{k+1}$ teljesüljön. $n \geq e^{k+1}$ esetén tehát a kitöltés nem valósítható meg. Feladatunkban $k = 5$, $e^{k+1} = 403,42 \dots < 1000 = n$, a kitöltés tehát nem létezik.