

Nyilvánvaló, hogy  $a_n = \sqrt{n + \sqrt{n + \dots + \sqrt{n}}} \geq \sqrt{n}$ , hiszen  $\sqrt{x}$  szigorúan monoton nő, ha  $x > 0$ . Ebből  $\sqrt{n} > 0$  miatt következik, hogy

$$(1) \quad \frac{a_n}{\sqrt{n}} \geq 1.$$

Most belátjuk, hogy  $a_n < \sqrt{n} + 1$ , ha  $n \geq 1$ . Ennél még kicsit többet állítunk. Ha  $a_k(n)$  jelöli azt a  $\sqrt{n + \dots + \sqrt{n}}$  kifejezést, amelyben a gyökjelek száma  $k$ , akkor  $k$ -től függetlenül  $a_k(n) < \sqrt{n} + 1$ . Ezt a  $k$ -ra vonatkozó indukcióval bizonyítjuk.  $k = 1$ -re az állítás triviális:  $a_1(n) = \sqrt{n} + 1$ . Ha  $(k - 1)$ -re  $a_{k-1}(n) < \sqrt{n} + 1$ , akkor

$$a_k(n) = \sqrt{n + a_{k-1}(n)} < \sqrt{n + \sqrt{n} + 1}.$$

De  $\sqrt{n + \sqrt{n} + 1} < \sqrt{n} + 1$ , amiről négyzetre emeléssel meggyőződhetünk ( $n + \sqrt{n} + 1 < n + 2\sqrt{n} + 1$ , és mindkét oldal pozitív). Így  $a_k(n) < \sqrt{n} + 1$ , amivel az indukciós lépést igazoltuk. Beláttuk tehát, hogy  $a_n = a_n(n) < \sqrt{n} + 1$ , s innen

$$\frac{a_n}{\sqrt{n}} < 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}.$$

Ezt (1)-gyel összevetve  $1 \leq \frac{a_n}{\sqrt{n}} < 1 + \frac{1}{\sqrt{n}}$ . Minthogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \left(1 + \frac{1}{\sqrt{n}}\right) = 1$ , a rendőrszabály szerint  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}} = 1$ .

Ezzel beláttuk, hogy  $\lim_{n \rightarrow \infty} \frac{a_n}{\sqrt{n}}$  létezik, s értékét is megadtuk.