

Adjunk hozzá az első két kifejezéshez x^2 -et, ekkor – a szorzattá alakítás után – az

$$(1) \quad (x+y)(x+z) = a^2$$

egyenlethez jutunk. Hasonlóan az első és harmadikhoz y^2 -et, az első és negyedikhez pedig z^2 -et adva az

$$(2) \quad (y+z)(y+x) = b^2,$$

$$(3) \quad (x+z)(y+z) = c^2$$

egyenleteket kapjuk.

1.eset: $abc \neq 0$. Ekkor (1) és (2) szorzatát (3)-mal elosztva kapjuk, hogy

$$(x+y)^2 = \frac{a^2 b^2}{c^2},$$

és hasonlóan adódnak az

$$(x+z)^2 = \frac{a^2 c^2}{b^2}, \quad (y+z)^2 = \frac{b^2 c^2}{a^2}$$

egyenletek. (1), (2)-ből látszik, hogy $x+y$, $x+z$ és $y+z$ előjele azonos. Az ismeretlenek összegének előjele szerint tehát két lehetőség van:

$$x+y = \left| \frac{ab}{c} \right|, \quad x+z = \left| \frac{ac}{b} \right|, \quad y+z = \left| \frac{bc}{a} \right|,$$

vagy

$$x+y = -\left| \frac{ab}{c} \right|, \quad x+z = -\left| \frac{ac}{b} \right|, \quad y+z = -\left| \frac{bc}{a} \right|.$$

Ezek megoldása

$$x_1 = \frac{\left| \frac{ab}{c} \right| + \left| \frac{ac}{b} \right| - \left| \frac{bc}{a} \right|}{2}, \quad y_1 = \frac{\left| \frac{ab}{c} \right| - \left| \frac{ac}{b} \right| + \left| \frac{bc}{a} \right|}{2},$$

$$z_1 = \frac{-\left| \frac{ab}{c} \right| + \left| \frac{ac}{b} \right| + \left| \frac{bc}{a} \right|}{2},$$

illetve $x_2 = -x_1$, $y_2 = -y_1$, $z_2 = -z_1$.

Lépéseink megfordíthatók, így az $abc \neq 0$ esetben ezek és csak ezek az egyenletrendszer megoldásai.

2.eset: $a = b = c = 0$. Ekkor $x+y$, $x+z$, $y+z$ közül legalább kettő nulla, különben (1), (2), (3) egyszerre nem teljesülhetne. Ha pl. $x+y = 0 = x+z$, akkor innen $y = z = -x$ következik, s az ilyen számhármassok mind kielégítik az eredeti egyenletrendszert is.

Hasonlóan kapjuk a másik két esetben az $x = y = -z$ és $x = z = -y$ megoldásokat.

3.eset: $a \neq 0$, $b = 0$. Ekkor (2) miatt $y+z = 0$ vagy $y+x = 0$. Utóbbi azonban nem lehet, mert abból $a = 0$ következne, tehát $y+z = 0$. Ekkor viszont $c = 0$ és $y = -z$. Most (1)-ből $a^2 = x^2 - y^2$, azaz $x = \pm \sqrt{a^2 + y^2}$. Így az

$$x = \pm \sqrt{a^2 + y^2}, \quad y \text{ tetszőleges}, \quad z = -y$$

megoldáshármassokat kapjuk, s ezek az eredeti egyenletrendszernek is megoldásai.

Hasonlóan kapjuk $a = b = 0$, $c \neq 0$ esetén az x tetszőleges, $y = -x$, $z = \pm \sqrt{c^2 + x^2}$ és az $a = c = 0$, $b \neq 0$ esetén az x tetszőleges, $y = \pm \sqrt{b^2 + x^2}$, $z = -x$ megoldáshármassokat.

Nyilvánvaló, hogy a 3. eset megoldásai tartalmazzák a 2. eset megoldásait, így a feladat megoldásai röviden a következők:

Ha $abc \neq 0$, akkor $x = x_1$, $y = y_1$, $z = z_1$ vagy $x = -x_1$, $y = -y_1$, $z = -z_1$.

Ha a, b, c közül pontosan egy nulla, akkor nincs megoldás.

Ha $a = b = 0$, akkor x tetszőleges, $y = -x$ és $z = \pm \sqrt{c^2 + y^2}$.

Ha $a = c = 0$, akkor z tetszőleges, $x = -z$ és $y = \pm \sqrt{b^2 + x^2}$.

Ha $b = c = 0$, akkor y tetszőleges, $z = -y$ és $x = \pm \sqrt{a^2 + z^2}$.