

Tegyük fel, hogy az $e_1, e_2, \dots, e_m$ egyenesek mindegyike keresztülmegy P -n és felezi az S területét. Tegyük fel azt is, hogy e_1 -et P körül pozitív irányba forgatva először e_2 -t, azután e_3 -at stb., végül e_m -et kapjuk. Minthogy S konvex, P pedig belső pont, S kerületét minden e_i egyenes pontosan kétszer metszi, az m darab egyenes tehát S -et $2m$ darab konvex sokszögre bontja. Legyenek ezek – pozitív körüljárás szerint – rendre $T_1, T_2, \dots, T_m, U_1, U_2, \dots, U_m$. A T_i és az U_i éppen „szemben” vannak egymással, s mindkettőt e_i és e_{i+1} határolja. T_i és U_i területe nyilván egyenlő, hiszen e_i és e_{i+1} is felezi S területét. Tükrözzük T_i -t P -re, a kapott sokszög legyen T'_i . T'_i -t és U_i -t most e_i -nek és e_{i+1} -nek azonos, P -ből induló félegyenesei határolják (vagyis azonos, e_i, e_{i+1} által határolt szögtartományba esnek). T'_i és U_i területe egyenlő, T'_i tehát nem eshet teljes egészében U_i belsejébe, de nem is foglalhatja egészen magában U_i -t. T'_i -nek és U_i -nek van tehát közös pontja S kerületén. Ugyanez igaz T_i és U'_i -re, ahol U'_i az U_i -nek P -re vonatkozó tükörképe.

1987-10-302-1.eps

Ha most S -et tükrözzük P -re, akkor a kapott S' tükörkép a $T_1, T_2, \dots, T_m, U_1, U_2, \dots, U_m$ sokszögek mindegyikét metszeni fogja S kerületének egy-egy (semelyik e_i -hez nem tartozó) pontjában. S -et S' tehát legalább $2m$ különböző pontban metszi. S -nek és S' -nek nincs közös oldalegyenese, különben S -nek volnának párhuzamos oldalai. Így S' minden oldalegyenese legfeljebb két pontban metszi S -et, mert S konvex. S' -nek n oldalegyenese van, tehát S és S' metszéspontjainak a száma legfeljebb $2n$. A metszéspontok számát k -val jelölve azt kapjuk tehát, hogy $2m \leq k \leq 2n$, ahonnan $m \leq n$ következik.

Ezzel beláttuk, hogy a P -n átmenő területfelező egyenesek száma valóban legfeljebb n . Ez a szám el is érhető, mint azt a páratlan oldalú szabályos sokszögek mutatják (P a középpont).

Ha egy téglalap két szemközti oldalához két egyenlő területű sokszöget illesztünk úgy, hogy a kapott sokszög konvex maradjon, akkor az így kapott sokszögnek végtelen sok, a téglalap középpontján áthaladó területfelező egyenese van. Ez mutatja, hogy nem hagyható el a feladatnak az a kikötése, hogy S -nek ne legyenek párhuzamos oldalai.

Ha S nem konvex, akkor pedig már az is nehezen megválaszolható kérdés, hogy mikor nevezzünk egy egyenest területfelezőnek.