

I. megoldás. Megmutatjuk, hogy minden háromszögben

$$(1) \quad f_c \leq \sqrt{s(s-c)} \leq s_c,$$

és (1)-ben pontosan akkor teljesül egyenlőség, ha a C csúsból induló oldalak egyenlők, azaz $a = b$. Ebből a bizonyítandó állítás már következik, ha a három szögfelezőre és súlyvonalra felírjuk (1)-et, és az egyenlőtlenségeket összeszorozzuk. Ekkor ugyanis

$$f_a \cdot f_b \cdot f_c \leq \sqrt{s^3(s-a)(s-b)(s-c)} \leq s_a \cdot s_b \cdot s_c$$

adódik, és Hérón tétele szerint a négyzetgyök alatt éppen $(s \cdot t)^2$ áll. Az is látható, hogy a bizonyítandó állításban pontosan akkor van egyenlőség, ha a háromszög bármely két oldala egyenlő, azaz a háromszög szabályos.

Az (1)-ben szereplő $\sqrt{s(s-c)}$ mennyiséget nehéz közvetlenül becsülni. Belátjuk viszont, hogy

$$(2) \quad \sqrt{s(s-c)} = \sqrt{ab} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}.$$

1987-11-365-1.eps

1. ábra

Az 1. ábráról leolvasható, hogy $\cos \frac{\gamma}{2} = \frac{s}{CO_c} = \frac{s-c}{CO}$, ahol O_c az AB oldalt kívülről érintő hozzáírt kör középpontja. Az egyenlőségeket összeszorozva

$$(3) \quad \cos^2 \frac{\gamma}{2} = \frac{s(s-c)}{CO \cdot CO_c}$$

adódik.

A megfelelő szögek egyenlőségéből kapjuk, hogy a CBO és a CO_cA háromszögek hasonlóak. Ebből $\frac{CO}{a} = \frac{b}{CO_c}$, azaz $CO \cdot CO_c = ab$ következik, amit (3)-mal egybevetve kapjuk, hogy

$$s(s-c) = ab \cdot \cos^2 \frac{\gamma}{2},$$

ami $\cos \frac{\gamma}{2} > 0$ miatt (2)-vel ekvivalens.

A bizonyítandó (1) egyenlőtlenséget ezután az

$$(4) \quad f_c \leq \sqrt{ab} \cos \frac{\gamma}{2} \leq s_c$$

formában látjuk be. Ha $a = b$, akkor (4)-ben egyenlőség áll. Ha a két oldal nem egyenlő, akkor legyen a a nagyobbik.

1987-11-365-2.eps

2. ábra

Bocsássunk merőlegest a C -n átmenő külső szögfelezőre A -ból és B -ből, és legyenek a talppontok A_1 , illetve B_1 (2. ábra). Ekkor az AA_1B_1B derékszögű trapéz alapjai párhuzamosak f_c -vel, hosszuk így $a \cdot \cos \frac{\gamma}{2}$, illetve $b \cdot \frac{\gamma}{2}$.

Jelölje E és F a C -ből induló szögfelező, illetve a súlyvonal talppontját az AB oldalon. Ekkor $\frac{AE}{EB} = \frac{b}{a} < \frac{AF}{FB} = 1$, így az AB oldalt $\sqrt{\frac{b}{a}}$ arányban osztó P pont az EF szakasz belső pontja.

Húzzunk most párhuzamost a trapéz alapjaival a P -n és az F -en keresztül, és messék ezek a trapéz másik szárát P_1 -ben, illetve F_1 -ben. Ekkor nyilván $f_c = CE < P_1P < F_1F < FC = s_c$. Ha megmutatjuk, hogy PP_1 éppen a trapéz alapjainak mértani közepe, azaz $\sqrt{ab} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}$, akkor készen vagyunk. Ez viszont következik abból a jól ismert tényből, hogy egy trapézban, melynek alapjai u és v , a szárakat $\lambda : \mu$ arányban osztó szakasz hossza (3. ábra)

$$(5) \quad \frac{\lambda + \mu v}{\lambda + \mu}.$$

Jelenleg ugyanis $\lambda : \mu = \sqrt{\frac{b}{a}} : 1$, és ezért

$$PP_1 = \frac{\sqrt{\frac{b}{a}} \cdot a \cdot \cos \frac{\gamma}{2} + b \cdot \cos \frac{\gamma}{2}}{\sqrt{\frac{b}{a}} + 1} = \sqrt{ab} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}$$

valóban.

Megjegyzés. Ismert egyenlőtlenségekre hivatkozva gyorsabban is célhoz érhetünk, ha felhasználjuk az $f_c = \frac{2ab}{a+b} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}$ összefüggést. Eszerint az AA_1B_1B trapézban f_c az alapok harmonikus közepe. Ugyanitt FF_1 középvonal, és így az alapok számtani közepével egyenlő, ami a $CF F_1$ derékszögű háromszög befogójaként rövidebb az FC átfogónál, ami nem más, mint s_c . A bizonyítandó állítás most már a harmonikus, mértani és számtani közepekre vonatkozó egyenlőtlenségekből adódik.

II. megoldás. Ismert összefüggések következetes alkalmazásával is eljuthatunk (1) bizonyításáig.

$$0 < \cos \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{1 + \cos \gamma}{2}} = \sqrt{\frac{1}{2} \left(\frac{2ab}{2ab} + \frac{a^2 + b^2 - c^2}{2ab} \right)},$$

ahol a négyzetgyök alatt $\cos \gamma$ -t a koszinusztétel szerint írtuk fel. Tovább alakítva

$$\cos \frac{\gamma}{2} = \sqrt{\frac{1}{4} \cdot \frac{(a+b)^2 - c^2}{ab}} = \sqrt{\frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} \cdot \frac{1}{ab}} = \sqrt{\frac{s(s-c)}{ab}},$$

azaz megkaptuk az első megoldás (2) egyenlőségét.

Az ismert $f_c = \frac{2ab}{a+b} \cdot \cos \frac{\gamma}{2}$ összefüggésbe helyettesítve kapjuk, hogy $f_c = \frac{\sqrt{ab}}{\frac{a+b}{2}} \cdot \sqrt{s(s-c)}$. A számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség szerint az első tényező legfeljebb 1, így f_c valóban nem lehet nagyobb, mint $\sqrt{s(s-c)}$.

A C -ből induló súlyvonalra ugyancsak a koszinusztételből

$$s_c^2 = b^2 + \frac{c^2}{4} - 2b \frac{c}{2} \cdot \cos \alpha, \quad \text{és mivel} \quad \cos \alpha = \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc},$$

ezért

$$s_c^2 = b^2 + \frac{c^2}{4} - 2b \frac{c}{2} \cdot \frac{b^2 + c^2 - a^2}{2bc} = \frac{b^2 + a^2}{2} - \frac{c^2}{4}.$$

Végül a számtani és a négyzetes közép között fennálló egyenlőtlenséget felhasználva

$$s_c^2 \geq \frac{(a+b)^2}{4} - \frac{c^2}{4} = \frac{a+b+c}{2} \cdot \frac{a+b-c}{2} = s(s-c).$$

Ezzel az (1)-ben szereplő második egyenlőtlenséget is igazoltuk, és az is látszik, hogy (1)-ben pontosan akkor állnak egyenlőségek, ha $a = b$.