

I. megoldás. Használjuk az $u = \sqrt[5]{x-6}$ és a $v = \sqrt[5]{39-x}$ jelöléseket. Az egyenlet bal oldala ekkor

$$(v^5 u - u^5 v)/(v - u) = uv(v^4 - u^4)/(v - u) = uv(u + v)(u^2 + v^2)$$

alakba írható. Másrészt

$$u^5 + v^5 = (u + v)(u^4 - u^3 v + u^2 v^2 - uv^3 + v^4).$$

A következő egyenletrendszert kapjuk u -ra és v -re:

$$(1) \quad uv(u + v)(u^2 + v^2) = 30,$$

$$(2) \quad (u + v)(u^4 - u^3 v + u^2 v^2 - uv^3 + v^4) = 33.$$

A második egyenletben is célszerű a bal oldal második tényezőjét $u^2 + v^2$ és uv polinomjaként felírni:

$$u^4 - u^3 v + u^2 v^2 - uv^3 + v^4 = (u^2 + v^2)^2 - u^2 v^2 - uv(u^2 + v^2).$$

Ha most a második egyenletet osztjuk az elsővel, akkor az

$$\frac{u^2 + v^2}{uv} - \frac{uv}{u^2 + v^2} - 1 = 1, 1$$

egyenlethez jutunk. (Az első egyenlet jobb oldala pozitív, így az osztásnál nem veszítettünk gyököt). A $z = \frac{u^2 + v^2}{uv} =$

$\frac{u}{v} + \frac{v}{u}$ változóra tehát a $z - \frac{1}{z} = 2, 1$ egyenletet kapjuk. Ennek két megoldása $z = 2, 5$ és $z = -0, 4$. Egy szám és a reciprokának összegeként viszont z nem eshet -2 és 2 közé, így csak

$$z = \frac{u}{v} + \frac{v}{u} = 2, 5 \quad \text{lehetséges.}$$

Ez $\frac{u}{v}$ -re másodfokú egyenlet, amelynek két megoldása 2 és $\frac{1}{2}$. A feladat egyenletét tehát csak olyan x elégítheti ki, amelyre

$$\frac{u}{v} = \sqrt[5]{\frac{x-6}{39-x}} = 2 \quad \text{vagy} \quad \sqrt[5]{\frac{x-6}{39-x}} = \frac{1}{2}.$$

E két elsőfokú egyenletet megoldva $x_1 = 38$ és $x_2 = 7$. Behelyettesítéssel meggyőződhetünk, hogy mindkét érték valóban megoldása a feladatnak. **II. megoldás.** Ismét az (1) és (2) egyenletrendszert oldjuk meg. $u + v$ nem lehet

nulla, hiszen különben $u^5 + v^5$ is nulla volna. Szorozzuk tehát (1)-et $\frac{11}{u+v}$ -vel, (2)-t $\frac{10}{u+v}$ -vel, és vonjuk ki az első kapott egyenletet a másodiktól. Ekkor a

$$-11uv(u^2 + v^2) + 10(u^4 - u^3 v + u^2 v^2 - uv^3 + v^4) = 0$$

egyenlethez jutunk. Rendezzük a bal oldalt:

$$10u^4 - 21u^3 v + 10u^2 v^2 - 21uv^3 + 10v^4 = 0.$$

Itt $v \neq 0$, hiszen különben a feladat egyenletének bal oldala is nulla volna. Oszthatunk tehát v^4 -nel, s ekkor $\frac{u}{v} = t$ -re a

$$(3) \quad 10t^4 - 21t^3 + 10t^2 - 21t + 10 = 0$$

negyedfokú, úgynevezett *reciprok egyenletet* kapjuk. Ezt a szokásos módon oldjuk meg: először osztunk t^2 -tel, így a bal oldal

$$10 \left(t^2 + \frac{1}{t^2} \right) - 21 \left(t + \frac{1}{t} \right) + 10 = 10 \left(t + \frac{1}{t} \right)^2 - 21 \left(t + \frac{1}{t} \right) - 10$$

alakba írható, azaz $t + \frac{1}{t}$ -re (ismét) a

$$10 \left(t + \frac{1}{t} \right)^2 - 21 \left(t + \frac{1}{t} \right) - 10 = 0$$

másodfokú egyenletet kapjuk.

$\left(t + \frac{1}{t} \right)$ éppen az előző megoldásbeli z , így az első megoldás befejezése szerint $t + \frac{1}{t} = 2, 5$, ahonnan a két megoldás 38 és 7 .

Megjegyzés. Sokan eljutottak az $uv(u + v)(u^2 + v^2) = 30$ egyenlethez, de ezután felhasználták az egyértelmű prímfelbontást, azaz feltették, hogy u és v egész szám. A feladat azonban az *összes* valós megoldás megkeresése volt. (Más kérdés, hogy a megoldás során *kiderül*, hogy u és v egész.)