

Jelöljük az a hosszúságú él végpontjait A -val és B -vel, a másikéit C és D -vel, a felezőpontok legyenek P és Q . Használjuk az ábra egyéb jelöléseit is.

1987-09-258-1.eps

Szerkesszük meg a tetraéder köré írt paralelepipedont, vagyis azt a testet, amelyet a tetraéder kitérő élpárjaira illesztett párhuzamos síkok határolnak. E paralelepipedon egyik lapjának átlója az $AB = a$ szakasz, és ennek a lapnak a másik átlója b hosszúságú. Ezért a lap területe $\frac{1}{2}ab \cdot \sin \varphi$. Jelöljük a tetraéder térfogatát V -vel.

Ismeretes, hogy a körülírt paralelepipedon térfogata háromszor akkora, mint a tetraéderé. Nyilvánvaló továbbá, hogy a paralelepipedon említett lapjához tartozó magassága – jelöljük ezt m -mel –, legfeljebb akkora lehet mint k , azaz $m \leq k$. Egyenlőség itt csak akkor állhat, ha PQ merőleges a paralelepipedon AB -t, illetve CD -t tartalmazó lapjaira, és akkor PQ AB -re és CD -re is merőleges. Ezek után a paralelepipedon térfogatát a következőképpen becsüljük:

$$3V = \frac{1}{2}ab \cdot (\sin \varphi) \cdot m \leq \frac{1}{2} \cdot a \cdot b \cdot k,$$

hiszen $\sin \varphi \leq 1$, ahonnan kapjuk, hogy $V \leq \frac{a \cdot b \cdot k}{6}$. Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha $\sin \varphi = 1$ és $m = k$, ezek együtt pontosan akkor teljesülnek, ha AB és CD mind egymásra, mind PQ -ra merőlegesek. Könnyű látni, hogy ilyen tetraéder létezik.

A felszín becsléséhez vegyük figyelembe, hogy a tetraédert két, az $AB = a$ élre, és két, a $CD = b$ élre illeszkedő háromszög határolja. Mivel egy háromszögben egy adott oldalhoz tartozó magasság hossza nem nagyobb, mint az ugyanahhoz az oldalhoz tartozó súlyvonal, a háromszög területe a szokásos jelölésekkel legfeljebb $\frac{1}{2} \cdot a \cdot s_a$.

Jelöljük a tetraéder felszínét A -val. Az előbbieket szerint ekkor

$$A \leq \frac{a(x+y)}{2} + \frac{b(r+s)}{2},$$

ahol x , y , r , s mindegyike egy tetraéderlap megfelelő súlyvonalszakasza. Írjuk fel a PQD , illetve PQC háromszögekre a koszinusztételt:

$$x^2 = k^2 + \frac{b^2}{4} - kb \cdot \cos \alpha, \quad y^2 = k^2 + \frac{b^2}{4} + kb \cdot \cos \alpha,$$

ahol α a DQP -et jelenti. A két egyenletet összeadva kapjuk, hogy

$$(1) \quad x^2 + y^2 = 2 \left(k^2 + \frac{b^2}{4} \right).$$

A számtani és a négyzetes közép közötti egyenlőtlenség szerint

$$\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{\frac{x^2+y^2}{2}},$$

ezért (1) felhasználásával

$$\frac{x+y}{2} \leq \sqrt{k^2 + \frac{b^2}{4}},$$

és hasonlóan

$$\frac{r+s}{2} \leq \sqrt{k^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

Ezek alapján

$$A \leq a\sqrt{k^2 + \frac{b^2}{4}} + b\sqrt{k^2 + \frac{a^2}{4}}.$$

Egyenlőség akkor és csak akkor áll fenn, ha az x , y , r , s szakaszok egyben magasságok is a megfelelő háromszögekben, továbbá, ha $x = y$ és $r = s$. Ez azt jelenti, hogy AB és CD mind egymásra, mind PQ -ra merőlegesek, vagyis a tetraéder felszíne és térfogata egyszerre maximális.