

A kérdés összefügg a 2518. feladattal és a 2304. gyakorlattal. (Megoldásuk az 1986. évi januári, illetve májusi számunkban olvasható.) Az utóbbi megoldásához fűzött megjegyzésből kiderül, hogy a mindkét esetben alkalmazott „kiegyensúlyozó eljárás” nem feltétlenül vezet eredményre. Tehát ha az adott számoknak mérőszúlyokat feleltetünk meg, és ezeket nagyság szerint csökkenő sorrendben helyezük egy két karú mérleg egy-egy serpenyőjébe, egyensúly esetén a bal oldalba, egyébként pedig a könnyebbikbe téve a soron következőt, akkor a súlyok elfogytával nem minden esetben lesz egyensúlyban a két serpenyő.

Ha az eljárás „elakad”, azaz valamelyik serpenyőbe egy m tömegű súlyt felrakva itt túllépnénk a teljes tömeg felét, az 50 grammot, akkor eddigre mindkét serpenyőn legalább $50 - (m - 1) = 51 - m$ a súlyok együttes tömege, így legfeljebb $2m - 2$ tömegű súly nincs még a mérlegen. A serpenyőkben lévő tömeg másrészt nyilván legfeljebb $100 - m$, és így eddig az elakadásig legfeljebb

$$\left\lfloor \frac{100 - m}{m} \right\rfloor = \left\lfloor \frac{100}{m} \right\rfloor - 1$$

darab súlyt helyezhettünk el a mérlegen, hiszen a csökkenő sorrend miatt az eddig felhasznált súlyok mindegyike legalább m tömegű.

Így legalább $35 - \left(\left\lfloor \frac{100}{m} \right\rfloor - 1 \right) = 36 - \left\lfloor \frac{100}{m} \right\rfloor \geq 36 - \frac{100}{m}$ darab súlyt kell még elhelyeznünk, és ezek együttes tömege az elakadás tényéből kiolvasott első becslés szerint legfeljebb $2m - 2$. Pontosabban a „kritikus”, m tömegű súlytól eltekintve még legalább $35 - \frac{100}{m}$ darab súly jut legfeljebb $m - 2$ gramm tömegre.

Minden súly tömege legalább 1, ezért $35 - \frac{100}{m} \leq m - 2$, azaz $m^2 - 37m + 100 \geq 0$. Figyelembe véve, hogy m egész, ez akkor és csak akkor teljesül, ha $35 \leq m$ vagy $2 \geq m$.

Az $m \geq 35$ eset nem lehetséges, hiszen ekkor a csökkenő sorrend miatt az elakadás előtt már mindkét serpenyőben volna egy-egy legalább 35 grammos súly és a „kritikus” m tömeggel együtt ezek összege legalább $3 \cdot 35$, ami nagyobb 100-nál.

$m = 1$ tömegű súllyal viszont már nem akadhat el az eljárás, ilyenkor ugyanis egyesével haladva egyik serpenyőben sem léphetjük át az 50 grammos tömeget.

Elakadás tehát valójában csak az $m = 2$ esetben lehetséges, láthatóan úgy, ha mindkét serpenyőben 49 grammnyi súly gyűlt össze, és megmaradt egy 2 grammos súly. (1 grammos súlyunk ilyenkor egyáltalán nincsen.) Ez elő is fordulhat, például úgy, ha 30 darab 3 grammos és 5 darab 2 grammos súlyunk van. Megmutatható, hogy ilyenkor a két serpenyőben lévő súlyoknak létezik egy-egy olyan részhalmaza, amelyek össztömegének eltérése éppen 1 gramm. Ezt a két részhalmazt kicserélve a serpenyők eltérése 2 lesz, ami a megmaradt súllyal kiegyensúlyozható. Mi azonban most egy másik utat választunk.

Ha nincsen 1 grammos súly, akkor a 2 grammos súlyok száma nyilván legalább öt ($4 \cdot 2 + 31 \cdot 3 > 100$). Tegyük félre öt darabot a 2 grammos súlyok közül. Belátjuk, hogy a többi harminc súlynak létezik olyan részhalmaza, hogy az abban lévő súlyok együttes tömege 40 és 50 közé eső páros szám, és így a félretett 2 grammos súlyok felhasználásával 50 grammá egészíthető ki.

A megmaradó súlyok összege (90 gramm) és száma (30) is páros, így közöttük mind a páratlan, mind pedig a páros tömegű súlyok száma páros. Készítsünk tehát párokat a páratlan tömegű súlyokból és a páros tömegűekből is, és tekintsük az egyes párokba került súlyok összegét. Így 15 páros számot kapunk, mindegyikük legalább 4, összegük pedig 90. Megmutatjuk, hogy ezek között van néhány olyan, amelyek S összegére – ami nyilván páros – $40 \leq S \leq 50$.

Legyen a 15 szám csökkenő sorrendben b_1, b_2, \dots, b_{15} és jelölje S_k az első k darab összegét. Mivel $b_1 \geq 4$, ezért $S_k = 90 - (b_{k+1} + \dots + b_{15}) \leq 90 - (15 - k) \cdot 4 = 30 + 4k$, vagyis $S_5 \leq 50$. Ha $S_5 \geq 40$, akkor készen vagyunk.

Ha $S_5 \leq 38$, akkor $S_5 \geq 5 \cdot b_5$ miatt $b_5 \leq \frac{38}{5} < 8$, így ha $i \geq 5$, akkor $b_i \leq 6$. Eszerint ha egy 40-nél kisebb számot – S_4 – legfeljebb 6-osával növelve 90-ig – S_{15} – jutunk, akkor nem „ugorhatjuk át” a $[40, 50]$ számközt, lesz tehát olyan k , amelyre $40 \leq S_k \leq 50$. Ezzel a bizonyítást befejeztük.