

I. megoldás. Legyen az ABC háromszög területe T , kerületének fele s , a beírt kör A' , B' , C' érintési pontjai által meghatározott háromszög területe pedig t . A további jelöléseket az ábrán láthatjuk.

1987-09-255-1.eps

Ismeretes, hogy $AC' = s - a$, és így az ábra alapján $t_1 = \frac{1}{2}(s - a)^2 \sin \alpha$; $T = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$, ahonnan $t_1 = T \cdot \frac{(s - a)^2}{bc}$. Hasonló összefüggéseket kapunk t_2 -re és t_3 -ra.

A keresett terület ezután $t = T - t_1 - t_2 - t_3$, ami az előbbieket fölhasználva:

$$t = T - T \cdot \frac{(s - a)^2}{bc} - T \cdot \frac{(s - b)^2}{ac} - T \cdot \frac{(s - c)^2}{ab}.$$

Ha most T -t kifejezzük a Hérón-képlettel, akkor kiemelés után a feladat követelményeinek megfelelő

$$t = \sqrt{s(s - a)(s - b)(s - c)} \left(1 - \frac{(s - a)^2}{bc} - \frac{(s - b)^2}{ac} - \frac{(s - c)^2}{ab} \right)$$

összefüggéshez jutunk.

II. megoldás. Az $AC'OB'$ húrnégyszögben $B'OC' \angle = 180^\circ - \alpha$, és így $T_1 = \frac{1}{2}r^2 \sin \alpha$. T_2 és T_3 hasonló kifejezésével (r a beírt kör sugara):

$$(1) \quad t = \frac{1}{2}r^2(\sin \alpha + \sin \beta + \sin \gamma).$$

Mivel pl. $T = \frac{1}{2}bc \sin \alpha$, következik, hogy $\sin \alpha = \frac{2T}{bc}$, és hasonló igaz $\sin \beta$ és $\sin \gamma$ -ra. Ezért (1) így írható:

$$t = \frac{r^2}{2} \left(\frac{2T}{bc} + \frac{2T}{ac} + \frac{2T}{ab} \right).$$

Emeljük ki T -t és használjuk fel a $T = rs$ összefüggést. Ekkor $t = \frac{T^3}{s^2} \cdot \frac{a + b + c}{abc}$, amiben T -t ismét a Hérón-képlet alapján helyettesítve:

$$t = \frac{2 \cdot \sqrt{s \cdot (s - a)^3(s - b)^3(s - c)^3}}{abc}.$$