

I. megoldás. Jelöljük a vizsgált összeget S -sel. Az összeg tagjai az $f(x) = \frac{1}{\sqrt[4]{x}}$ függvény egész helyeken fölvetett értékei az $[1; 10\,000]$ intervallumban. Az f folytonos ebben az intervallumban, ezért ott integrálható. Tekintsük a következő integrálközelítő-összegeket:

$$A = \sum_{k=2}^{10\,000} f(k), \quad F = \sum_{k=1}^{9999} f(k).$$

Ezekkel az integrál értéke becsülhető, éspedig

$$(1) \quad A = S - 1 < \int_1^{10\,000} \frac{dx}{\sqrt[4]{x}} < F = S - \frac{1}{10},$$

hiszen f a tekintett intervallumban pozitív és monoton fogy. Mivel

$$\int_1^{10\,000} \frac{dx}{\sqrt[4]{x}} = 1332,$$

ezért (1) szerint $S - 1 < 1332 < S - 0,1$, azaz $1332,1 < S < 1333$, és így $[S] = 1332$.

II. megoldás. S egész részének meghatározásához fölhasználjuk a következő, minden pozitív egészre érvényes egyenlőtlenséget:

$$(2) \quad \frac{4}{3}((n+1)^{3/4} - n^{3/4}) < \frac{1}{\sqrt[4]{n}} < \frac{4}{3}(n^{3/4} - (n-1)^{3/4}).$$

Csak a bal oldali egyenlőtlenséget igazoljuk, a másik bizonyítása hasonlóan történhet. Osszuk ennek mindkét oldalát $\frac{4}{3} \cdot n^{3/4}$ -nel. Rendezés után kapjuk, hogy a bizonyítandó állítás a

$$(3) \quad \sqrt[4]{\left(1 + \frac{1}{n}\right)^3} < 1 + \frac{3}{4n}$$

egyenlőtlenséggel ekvivalens. A bal oldalon négy szám, az $1, 1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}, 1 + \frac{1}{n}$ mértani közepe, a jobb oldalon pedig ugyanezeknek a számtani közepe áll, és mivel a számok nem mind egyenlők, (3) valóban igaz.

Ezután S , illetve $S - 1$ a következőképpen becsülhető:

$$\begin{aligned} S &= \frac{1}{\sqrt[4]{10\,000}} + \frac{1}{\sqrt[4]{9999}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[4]{2}} + \frac{1}{\sqrt[4]{1}} > \frac{4}{3}[(10\,001^{3/4} - 10\,000^{3/4}) + \\ &\quad + (10\,000^{3/4} - 9999^{3/4}) + \dots + (2^{3/4} - 1^{3/4})] = \frac{4}{3}[10\,001^{3/4} - 1]. \\ S - 1 &= \frac{1}{\sqrt[4]{10\,000}} + \frac{1}{\sqrt[4]{9999}} + \dots + \frac{1}{\sqrt[4]{2}} < \frac{4}{3}(10\,000^{3/4} - 9999^{3/4}) + \\ &\quad + (9999^{3/4} - 9998^{3/4}) + \dots + (2^{3/4} - 1^{3/4}) = \frac{4}{3}[10\,000^{3/4} - 1] = 1332. \end{aligned}$$

Azt kaptuk tehát, hogy $\frac{4}{3}(10\,001^{3/4} - 1) < S < 1333$. Mivel pedig

$$\frac{4}{3}(10\,001^{3/4} - 1) > \frac{4}{3}(10\,000^{3/4} - 1) = 1332,$$

azért $[S] = 1332$.

Megjegyzések. 1. A (2) egyenlőtlenség háttérében a $g(x) = x^{3/4}$ függvény konkáv volta áll, ugyanis $g'(x) = \frac{3}{4}x^{-1/4}$ alapján (2) a

$$(2'') \quad g(x+1) - g(x) < g'(x) < g(x) - g(x-1)$$

alakba írható. A (2') két szélén a görbe egy-egy húrjának, közepén pedig az $(x, g(x))$ -beli érintőjének meredeksége áll.

2. Az I. megoldás módszerével általában is igazolható, hogyha $k \geq 2$, természetes szám, akkor

$$\frac{k}{k-1}(n^{\frac{k-1}{k}} - 1) + \frac{1}{\sqrt[k]{n}} < \sum_{i=1}^n \frac{1}{\sqrt[k]{i}} < \frac{k}{k-1}(n^{\frac{k-1}{k}} - 1) + 1.$$

Hasonlóan igazolható, hogy

$$\frac{(n+1)^x - 1}{x} \leq \sum_{i=1}^n \frac{1}{i^{1-x}} \leq \frac{(n+1)^x}{x} - (n+1)^{x-1}, \quad \text{ahol } 0 < x \leq 1.$$