

I. megoldás. Használjuk az ábra jelöléseit. A feladat természetéből következik, hogy $m > 2$ és $FA = r > 1$.

1987-05-200-1.eps

Pitagorasz-tétel szerint $a = \sqrt{m^2 + r^2}$, az ACF és OCD háromszögek hasonlósága alapján pedig $a : r = (m-1) : 1$, ahonnan a szokásos módon

$$(1) \quad a = r(m-1).$$

Ezért $\sqrt{m^2 + r^2} = (m-1)r$, és így $m^2 + r^2 = (m^2 - 2m + 1)r^2$, azaz $m(m \cdot r^2 - m - 2r^2) = 0$. Mivel $m > 0$, ez csak akkor teljesülhet, ha $m \cdot r^2 - m - 2r^2 = 0$, vagyis

$$(2) \quad m = \frac{2r^2}{r^2 - 1} \quad (r > 1).$$

(1) és (2) alapján

$$(3) \quad a = r \cdot \left(\frac{2r^2}{r^2 - 1} - 1 \right) = \frac{r^3 + r}{r^2 - 1}.$$

Ismeretes, hogy a kúp felszíne $A = r \cdot \pi(r + a)$, amiből (3) felhasználásával „ A ” egyváltozós kifejezését nyerjük :

$$A = r \cdot \pi \cdot \left(r + \frac{r^3 + r}{r^2 - 1} \right) = 2\pi \frac{r^4}{r^2 - 1}.$$

„ A ” minimumának meghatározásához elegendő $\frac{r^4}{r^2 - 1}$ minimumát meghatározni, az $r > 1$ feltétel mellett. Mivel $\frac{r^4}{r^2 - 1} = \frac{1}{\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^4}}$, ezért „ A ” akkor minimális, ha $\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^4}$ maximális. Ezt a maximumot a következőképpen határozhatjuk meg: $\frac{1}{r^2} - \frac{1}{r^4} = \left(\frac{1}{r^2} - \frac{1}{2} \right)^2 + \frac{1}{4}$, és ez akkor maximális, ha $\frac{1}{r^2} = \frac{1}{2}$, és mivel $r > 1$, $r = \sqrt{2}$, a maximum értéke pedig $\frac{1}{4}$.

Ezért a kúp felszínének minimuma létezik, és az 8π .

II. megoldás. Az F. 2595. feladatban megmutattuk, hogy a gömb köré írt forgáskúp térfogata legalább kétszerese a gömb térfogatának.

A *Geometriai feladatok gyűjteménye* I. 2855. feladatából tudjuk, hogy a gömb köré írt forgáskúp felszínének mérőszáma 3-szorosa a térfogat mérőszámának. Ezért a térfogat és a felszín egyszerre minimális.

Az F. 2595. feladat megoldása szerint (lásd 1986. évi 10. szám) az egységsugarú gömb köré írt forgáskúp térfogatának minimuma $\frac{8}{3}\pi$ ezért a felszínének minimuma $3 \cdot \frac{8}{3}\pi = 8\pi$.

Megjegyzés. A minimum helyét a számtani és a mértani közép közötti egyenlőtlenséggel vagy deriválással is meg lehet határozni. Utóbbi esetben bizonyítani kell, hogy a derivált függvény zérushelye valóban minimumhely. Ezt több beküldő elmulasztotta. Néhányan úgy gondolták, hogy a minimális felszínű kúp egyenlő oldalú. Ez nem igaz.