

I. megoldás. $n = 1$ nyilván megfelel, $n = 2$ nem: $\binom{1}{0} = \binom{1}{1} = 1$ páratlan, de $\binom{2}{1} = 2$ páros. A továbbiakban legyen n a feltételeknek megfelelő, 2-nél nagyobb egész. Ismeretes, hogy

$$\binom{n}{k} = \frac{n(n-1)\dots(n-k+2)(n-k+1)}{k!}.$$

Ha $\binom{n}{1} = n$ páratlan, akkor $\binom{n}{2} = n \frac{n-1}{2}$ csak úgy lehet páratlan, ha $n-1$ páros, de nem osztható négygyel. Ha $n > 4$, akkor tekintsük a $3\binom{n}{4} = \frac{n(n-1)}{2} \cdot (n-2) \frac{n-3}{4}$ számot. Ez páratlan, és $\frac{n(n-1)}{2} = \binom{n}{2}$ is, $n-2$ is páratlan egész, tehát $\frac{n-3}{4}$ is szükségképp egész. Ezért $n-3$ osztható négygyel. Ha most $n > 2^l$, akkor hasonlóan a $(2^l-1)\binom{n}{2^l}$ páratlan egész, másrészt

$$\begin{aligned} (2^l-1)\binom{n}{2^l} &= \frac{n \cdot (n-1) \cdot \dots \cdot (n-2^l+3)}{(2^l-2)!} \cdot (n-2^l+2) \cdot \frac{n-2^l+1}{2^l} = \\ &= \binom{n}{2^l-2} (n-2^l+2) \cdot \frac{n-2^l+1}{2^l}. \end{aligned}$$

Itt a bal oldal és a jobb oldal első két tényezője páratlan egész, tehát 2^l osztója $(n-2^l+1)$ -nek. Azt kaptuk, hogy valahányszor $2^l < n$, $(n-2^l+1)$ -nek mindannyiszor osztója 2^l . Legyen 2^L a legnagyobb, n -nél kisebb kettőhatvány: $2^L < n < 2^{L+1}$. Ilyen $L \geq 1$ létezik, hisz n páratlan és $n \geq 3$. Ekkor az imént bizonyítottak szerint 2^L osztója $(n-2^L+1)$ -nek. De $n-2^L+1 < 2^{L+1}-2^L+1 = 2^L+1$ és $n-2^L+1 > 1$. Mivel 2^L az 1-nél nagyobb, és a (2^L+1) -nél kisebb számok közül csak önmagát osztja, ezért $2^L = n-2^L+1$, tehát $n = 2^{L+1}-1$.

Azt kaptuk, hogy ha $\binom{n}{k}$ minden k -ra páratlan, akkor vagy $n = 1$ vagy $n = 2^{L+1}-1$ alakú, ahol $L \geq 1$.

Most megmutatjuk, hogy a talált feltétel elégséges, azaz ha $n = 2^{L+1}-1$ alakú, akkor

$$\binom{n}{k} = \binom{2^{L+1}-1}{k} = \frac{2^{L+1}-1}{1} \cdot \frac{2^{L+1}-2}{2} \cdot \frac{2^{L+1}-3}{3} \cdot \dots \cdot \frac{2^{L+1}-k}{k}$$

minden $1 \leq k \leq 2^{L+1}-1$ esetén páratlan.

S valóban: ha $1 \leq j \leq 2^{L+1}-1$, akkor a fenti szorzat j -edik tényezője, $\frac{2^{L+1}-j}{j}$ olyan törtté egyszerűsíthető, amelynek számlálója is, nevezője is páratlan egész. Írjuk fel ugyanis j -t $2^m \cdot j'$ alakban, ahol $m \geq 0$ egész és $j' > 0$ páratlan. Minthogy $2^m \leq j < 2^{L+1}$, ezért $m \leq L$. Következésképp

$$\frac{2^{L+1}-j}{j} = \frac{2^m(2^{L+1-m}-j')}{2^m j'} = \frac{2^{L+1-m}-j'}{j'}.$$

Itt j' , s így $2^{L+1-m}-j'$ is páratlan egész, ahogy állítottuk.

$\binom{2^{L+1}-1}{k}$ tehát minden $1 \leq k \leq 2^{L+1}-1$ esetén egész, másrészt olyan törtek szorzata, amelyeknek számlálója is, nevezője is páratlan. Ebből következik, hogy $\binom{2^{L+1}-1}{k}$ csak páratlan egész lehet. Végül $\binom{2^{L+1}-1}{0} = 1$ is páratlan.

Beláttuk tehát, hogy $\binom{n}{k}$ pontosan akkor páratlan minden $0 \leq k \leq n$ -re, ha $n = 2^m-1$ alakú, ahol $m \geq 2$. ($L \geq 1$ volt.) Végül $m = 1$ -re $n = 2^1-1 = 1$ is megfelel, tehát a feladat feltételeinek pontosan azok az n számok felelnek meg, amelyek egy kettőhatványnál 1-gyel kisebbek: $n = 1, 3, 7, \dots, 2^m-1, \dots$

Megjegyzések. 1. A megoldás során gyakran használtuk a számelmélet alaptételét.

2. Ismeretes (1. KÖMAL F. 2507., 1986/1. sz. 3. o.), hogy $\binom{n}{k}$ pontosan akkor lesz minden $1 \leq k \leq (n-1)$ -re páros, ha n kettőhatvány. Most megmutatjuk, hogy ez az állítás egyenértékű a feladat megoldásában bizonyítottakkal. Belátjuk, hogy $\binom{n}{l}$ pontosan akkor lesz minden $0 \leq l \leq n$ -re páratlan, ha $\binom{n+1}{l}$ páros minden $1 \leq l \leq n$ -re. (Ebből a két állítás egyenértékűsége már következik.)

Ismert, hogy

$$\binom{n}{l-1} + \binom{n}{l} = \binom{n+1}{l},$$

ha $1 \leq l \leq n$. Ha minden $\binom{n}{l}$ páratlan ($0 \leq l \leq n$), akkor a bal oldalon két páratlan szám összege áll s az páros, tehát $\binom{n+1}{l}$ páros $1 \leq l \leq n$ esetén. Másrészt ha $\binom{n+1}{l}$ minden $1 \leq l \leq n$ -re páros, akkor $\binom{n}{l-1}$ és $\binom{n}{l}$ minden $1 \leq l \leq n$ -re ugyanazt a maradékot adja kettővel osztva, azaz egyforma paritású. Tehát $\binom{n}{0}$ és $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{1}$ és $\binom{n}{2}$, ..., $\binom{n}{n-1}$ és $\binom{n}{n}$ egyforma paritású, ami azt jelenti, hogy $\binom{n}{0}$, $\binom{n}{1}$, $\binom{n}{2}$, ..., $\binom{n}{n}$ paritása megegyezik. Minthogy $\binom{n}{n} = 1$, ezért mindegyikük páratlan, ahogy állítottuk.

3. Az állítás hasonlóan bizonyítható a módosított Pascal-háromszöggel is, $\binom{n}{k}$ helyére 1-et vagy 0-t írva aszerint, hogy páratlan vagy páros. A módosított ("mod 2" számolt) Pascal-háromszög így néz ki (l. KÖMAL 1985/2. 51. o.):

1987-03-107-1.eps

(1. sor csupa 1-es;
 2. sor csupa 1-es;
 3. sor nem csupa 1-es;
 :
 :
 :
 2^k . sor csupa 1-es;
 :
 :
 :
 2^{k+1} . sor csupa 1-es)

Itt a „fenti” és a két „oldalsó, lenti” háromszög megegyezik. Az ábráról leolvasható, hogy a $2^k + 1$, $2^k + 2$, ..., $2^{k+1} - 1$ sorok mindegyikében van nulla („középen”), míg a 2^{k+1} . sorban nincs. Tehát pontosan azokban a sorokban áll végig egyes, amelyek sorszáma kettőhatvány. Az n . sorban a k . helyen éppen az $\binom{n-1}{k-1}$ szám kettővel osztva kapott maradéka áll, vagyis ismét azt kaptuk, hogy $\binom{n}{k}$ akkor lesz minden $0 \leq k \leq n$ -re páratlan, ha a módosított Pascal-háromszög $(n+1)$. sorában végig egyes áll, azaz ha $n+1$ kettőhatvány.

II. megoldás. A 2. megjegyzésben idézett állítás felhasználásával általában adunk szükséges és elegendő feltételt arra, hogy adott n és k esetén $\binom{n}{k}$ páratlan legyen.

Írjuk fel ehhez az n -et kettes számrendszerben, azaz legyen $n = 2^{a_r} + 2^{a_{r-1}} + \dots + 2^{a_1}$, ahol $a_1 < a_2 < \dots < a_r$, és tekintsünk egy n -elemű halmazt, amelynek minden elemét r darab szín valamelyikével festettük ki úgy, hogy az egyes színekből rendre 2^{a_1} , 2^{a_2} , ..., 2^{a_r} darab forduljon elő.

Az idézett állítás szerint tetszőleges $1 \leq k' < 2^{a_i}$ esetén $\binom{2^{a_i}}{k'}$ páros, tehát az azonos színű elemek adott, k' elemszámú részhalmazai párokba rendezhetők. A kifestés után minden egyes csoportban rögzítsük ezeket a párosításokat is, mégpedig minden $1 \leq k' < 2^{a_i}$ esetben.

Legyen most $0 \leq k \leq n$ tetszőleges és tekintsük az n -elemű halmaz $\binom{n}{k}$ darab k -elemű részhalmazát. Vegyük szemügyre azokat a k -asokat, amelyekhez van olyan szín – mondjuk az i -edik –, hogy mind az adott részhalmazban, mind pedig rajta kívül található i -színű elem. Hívjuk az ilyen k -asokat – az i színre nézve – *csonkának*. Megmutatjuk, hogy a csonka k -asok száma páros.

Tekintsük ehhez minden egyes ilyen k -ashoz a *legkisebb* olyan i -t, amelyre nézve csonka. Ha egy ilyen k -as a 2^{a_i} darab i -színű elem közül k' darabot tartalmaz, akkor nyilván $k' \leq k$, másrészt a csonkaság miatt $0 < k' < 2^{a_i}$.

Feleltessük most meg ennek a csonka k -asnak azt a k -ast, amelyben az i -től különböző színű elemek ugyanazok, a k' darab i -színű elem helyére pedig az ennek a k' -elemű részhalmaznak a $\binom{2^{a_i}}{k'}$ darab i -színű k' -elemű részhalmazon rögzített párosításnak megfelelő részhalmaz kerül. Ez a megfeleltetés nyilván kölcsönösen egyértelmű, csonka k -ashoz tőle különböző csonka k -ast rendel, így a csonka k -asok száma valóban páros.

Ez azt jelenti, hogy $\binom{n}{k}$ paritása megegyezik az n elem közül kiválasztható *nem csonka* k -elemű részhalmazok számának a paritásával. Ha egy k -elemű részhalmaz nem csonka, akkor tetszőleges i -re vagy minden i -színű elemet tartalmaz vagy pedig egyet sem. Egy nem csonka k -elemű részhalmaz elemszáma tehát bizonyos egyszínű részhalmazok elemszámának, azaz *különböző 2-hatványoknak az összege*. Mivel tetszőleges k egyértelműen írható fel ilyen számok összegeként – ez éppen a k kettes számrendszerbeli alakja – ezért adott k esetén *legfeljebb egy* nem csonka részhalmaz

létezik és ez is csak akkor, ha minden olyan 2-hatvány, ami a k kettes számrendszerbeli alakjában szerepel, előfordul az n kettes számrendszerbeli alakjában is.

Azt kaptuk, hogy $\binom{n}{k}$ pontosan akkor páratlan, ha az n -et és a k -t kettes számrendszerben felírva mindazokon a helyiértékeken, ahol a k -ban 1-es áll, az n -ben is 1-es áll.

Feladatunk állítása innen nyilvánvalóan adódik, hiszen ha $\binom{n}{k}$ minden $0 \leq k \leq n$ esetén páratlan, akkor az n kettes számrendszerbeli alakja nem tartalmazhat 0 számjegyet.