

Jelöljük a sorozat n -edik tagját a_n -nel. A számtani sorozat tulajdonságaiból következik, hogy

$$a_n = a_2 + (n - 2)d \quad \text{ha} \quad n \geq 1.$$

Az első feltétel szerint $a_9 = a_2^3$, vagyis

$$(1) \quad a_2^3 = a_2 + 7d.$$

A második és harmadik feltétel szerint van olyan n és m pozitív egész, amelyre $a_2^2 = a_n$ és $a_2^4 = a_m$, azaz

$$\begin{aligned} a_2^2 &= a_2 + (n - 2)d, \\ a_2^4 &= a_2 + (m - 2)d. \end{aligned}$$

Vezessük be az $n' = n - 2$ és $m' = m - 2$ változókat. Ekkor $n', m' \geq -1$ egészek és n' nem 0, hisz ekkor $a_2 = a_2^2 = a_2^3$, azaz $a_9 = a_2$, ami nem lehet.

$$(2) \quad a_2^2 = a_2 + n' d,$$

$$(3) \quad a_2^4 = a_2 + m' d.$$

Az (1), (2), (3) egyenletek mindkét oldalából a_2 -t levonva az

$$(1') \quad a_2^3 - a_2 = a_2(a_2 + 1)(a_2 - 1) = 7d,$$

$$(2') \quad a_2^2 - a_2 = a_2(a_2 - 1) = n' d,$$

$$(3') \quad a_2^4 - a_2 = a_2(a_2 - 1)(a_2^2 + a_2 + 1) = m' d$$

egyenletekhez jutunk. A felső és alsó egyenletet a középsővel osztva ($n' \neq 0$ és $d \neq 0$)

$$(4) \quad a_2 + 1 = \frac{7}{n'},$$

$$(5) \quad a_2^2 + a_2 + 1 = \frac{m'}{n'}.$$

Az (5) egyenlet bal oldala $(a_2 + 1)^2 - (a_2 + 1) + 1$ alakba írható, s ide (4)-et behelyettesítve az

$$\frac{m'}{n'} = \left(\frac{7}{n'}\right)^2 - \frac{7}{n'} + 1$$

egyenlethez jutunk, ahonnan n' -vel végigszorozva és rendezve azt kapjuk, hogy $\frac{49}{n'} = m' + 7 - n'$ egész szám, tehát n' osztója 49-nek.

Másrészt $n' \geq -1$, tehát n' lehetséges értékei: $n' = -1, 1, 7, 49$.

Itt $n' = -1$ esetén $m' < -1$, ami lehetetlen. $n' = 7$ esetén $m' = 7$ s így $a_2^4 = a_2^2$, azaz $a_2 = 0, 1$, vagy -1 adódik. (1)-ből mindhárom esetben $d = 0$, tehát a sorozat tagjai nem különbözők. A feladat feltételének ez is ellentmond.

A következő két lehetőség maradt:

$$\begin{aligned} n' &= 1, & m' &= 43; \\ n' &= 49, & m' &= 43. \end{aligned}$$

4)-ből a_2 és (2)-ből d kiszámítható: $a_2 = \frac{7}{n'} - 1$; $d = \frac{a_2^2 - a_2}{n'}$.

A feladat feltételeinek két sorozat tesz tehát eleget, első két tagjuk:

$$-24, 6; \text{ ill. } -\frac{2136}{2401}; -\frac{6}{7}.$$