

I. megoldás. Húzzunk párhuzamosokat az $ABCD$ négyszög csúcsain át a négyszög átlóival ($1/a, b$ ábrák). Az így kapott P paralelogramma területe nyilván az $ABCD$ négyszög területének kétszerese, másfelől a P oldalai a négyszög átlóival egyenlők, P oldalainak szöge pedig a négyszög átlóinak szögével. Mivel a megadott $\mathbf{u}$, illetve $\mathbf{v}$ vektorokkal történő eltolások során az átlók állása nem változik, az $A'B'C'D'$ négyszöghöz hasonlóan elkészített paralelogramma a P -vel egybevágó, és így a két négyszög területe valóban egyenlő.

1987-02-068-1.eps

1.a ábra

1987-02-068-2.eps

1.b ábra

Megjegyzés. A fenti paralelogramma területe $e \cdot f \cdot \sin(e, f)$, ahol e és f a négyszög átlói, azaz tetszőleges – nem hurkolt – négyszög területének kétszerese az átlók és az átlók szöge szinuszának a szorzata. Ez az összefüggés háromszögre is érvényes és ilyenkor a jól ismert $t = \frac{1}{2} a \cdot b \cdot \sin \gamma$ alakot ölti. (Az átlók a háromszög oldalaiba mennek át.)

Az alábbi változat teljes egészében a vektorok nyelvén írja le a fenti megoldást. Az ábrán $\mathbf{b} - \mathbf{c}$ javítandó $\mathbf{b} - \mathbf{a}$ -ra.

1987-02-069-1.eps

2. ábra

II. megoldás. Fejezzük ki az $ABCD$ négyszög csúcsaihoz húzott $\mathbf{a}, \mathbf{b}, \mathbf{c}, \mathbf{d}$ helyvektorokkal az AB, AD és az AC vektorokat a 2. ábra szerint. Ezeknek a vektoroknak a vektoriális szorzatával a négyszög kétszeres területe kifejezhető:

$$2\mathbf{t} = (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a}) + (\mathbf{c} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{d} - \mathbf{a}),$$

ahol $\mathbf{t}$ olyan vektor, amelynek hossza t , merőleges a négyszög síkjára és a pozitív féltérbe mutat.

A vektoriális szorzat tulajdonságai alapján

$$\begin{aligned} (1) \quad 2\mathbf{t} &= (\mathbf{b} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a}) - (\mathbf{d} - \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = \\ &= (\mathbf{b} - \mathbf{a} - \mathbf{d} + \mathbf{a}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a}) = (\mathbf{b} - \mathbf{d}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a}). \end{aligned}$$

Az (1) alapján az $A'B'C'D'$ négyszög kétszeres területvektora

$$\begin{aligned} 2\mathbf{t}' &= ((\mathbf{b} + \mathbf{v}) - (\mathbf{d} + \mathbf{v})) \times ((\mathbf{c} + \mathbf{u}) - (\mathbf{a} + \mathbf{u})) = \\ &= (\mathbf{b} - \mathbf{d}) \times (\mathbf{c} - \mathbf{a}). \end{aligned} \quad (2)$$

(1)-ből és (2)-ből pedig következik a feladat állítása.