

I. megoldás. Megmutatjuk, hogy az állítás minden egész n -re igaz. Írjuk fel $(a^4 + b^4 + c^4)$ -et az alábbi alakban:

$$\begin{aligned}
a^4 + b^4 + c^4 &= (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2(a^2b^2 + b^2c^2 + c^2a^2) = \\
&= (a^2 + b^2 + c^2)^2 - 2\{(ab + bc + ca)^2 - 2abc(a + b + c)\} = \\
&= (a^2 + b^2 + c^2)^2 + 4abc(a + b + c) - 2(ab + bc + ca)^2 = \\
&= (a^2 + b^2 + c^2)^2 + 4abc(a + b + c) - 2\left(\frac{(a + b + c)^2 - (a^2 + b^2 + c^2)}{2}\right)^2 = \\
&= (a^2 + b^2 + c^2)^2 + 4abc(a + b + c) - \frac{(a + b + c)^4}{2} - \\
&\quad - \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{2} + (a + b + c)^2(a^2 + b^2 + c^2).
\end{aligned}$$

Legyen tehát az n tetszőleges egész, s írjuk fel $n = 2^k m$ alakban, ahol $k \geq 0$ egész, m pedig páratlan egész. Ez a felírás egyértelmű. A feltétel szerint n , s így m is osztója $(a + b + c)^2$ -nek és $(a^2 + b^2 + c^2)^2$ -nek. Minthogy m páratlan, ezért m osztója $\frac{(a + b + c)^4}{2} + \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{2}$ -nek is. Az m tehát osztója a jobb oldal minden tagjának, így az egész jobb oldalnak is, tehát $m | a^4 + b^4 + c^4$.

Be kell még látni, hogy 2^k is osztója $a^4 + b^4 + c^4$ -nek. Ha $k = 0$, akkor nincs mit bizonyítani. Ha $k \geq 1$, akkor a feltevés szerint n , s így 2^k is osztója $(a^2 + b^2 + c^2)^2 + 4abc(a + b + c) + (a + b + c)^2(a^2 + b^2 + c^2)$ -nek.

Azt kell még igazolnunk, hogy $2^k \mid \frac{(a + b + c)^4}{2} + \frac{(a^2 + b^2 + c^2)^2}{2}$. Mivel $(a + b + c)^4$ osztható 2^{4k} -al is, így $\frac{(a + b + c)^4}{2}$ osztható 2^{4k-1} -nel is, tehát $4k - 1 > k$ miatt 2^k -nal is. Végül ugyanígy $(a^2 + b^2 + c^2)^2$ osztható 2^{2k} -nal, a fele tehát 2^{2k-1} -nel, s így $2k - 1 \geq k$ miatt 2^k -nal is. A jobb oldalon tehát minden tag osztható 2^k -nal, így az összeg is osztható vele.

Azt kaptuk tehát, hogy m is, 2^k is osztója $(a^4 + b^4 + c^4)$ -nek. De $(m, 2^k) = 1$, így $(a^4 + b^4 + c^4)$ osztható a szorzatukkal, $m \cdot 2^k = n$ -nel is. Ezzel beláttuk hogy a feladat állítása minden egész n -re teljesül.

II. megoldás. Egy szerencsésebb átalakítással az állítást az n páros vagy páratlan voltától függetlenül is igazolhatjuk. Ugyanis

$$\begin{aligned}
a^4 + b^4 + c^4 &= (a + b + c)(a^3 + b^3 + c^3) - \\
&- (a^3b + b^3c + c^3a + ab^3 + bc^3 + ca^3) = (a + b + c)(a^3 + b^3 + c^3) - \\
&- [(a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca) - (a^2bc + ab^2c + abc^2)] = \\
&= (a + b + c)(a^3 + b^3 + c^3) - (a^2 + b^2 + c^2)(ab + bc + ca) + \\
&\quad + (a + b + c)abc.
\end{aligned}$$

Látható, hogy a kapott háromtagú összeg minden tagjában az első tényező a feltétel szerint n -el osztható, így az összeg is.

Megjegyzés. A bizonyításból következik, hogy $n | a + b + c$ és $n | a^2 + b^2 + c^2$ esetén $n | a^{2^k} + b^{2^k} + c^{2^k}$ tetszőleges pozitív egész k -ra is.