

I. megoldás. Legyenek a háromszög szögei α , β , γ . A feladat szövegéből következik, hogy egyik szög sem derékszög, mert tangenseik léteznek. A szögek betűzéséről feltehető, hogy $\text{tg } \alpha \leq \text{tg } \beta \leq \text{tg } \gamma$. Ekkor csakis ebben a sorrendben alkothatnak számtani sorozatot, tehát

$$(1) \quad \text{tg } \alpha + \text{tg } \gamma = 2 \text{tg } \beta.$$

Írjuk be mindkét oldalon a tangens definícióját és szorozzunk $\cos \alpha \cdot \cos \beta \cdot \cos \gamma$ -val. Kapjuk, hogy

$$\cos \beta (\sin \alpha \cdot \cos \gamma + \cos \alpha \cdot \sin \gamma) = 2 \cdot \sin \beta \cdot \cos \alpha \cdot \cos \gamma.$$

A bal oldalon a zárójelben az addíciós tétel szerint éppen $\sin(\alpha + \gamma)$ áll, s ez $\sin(\pi - \alpha - \gamma) = \sin \beta$ -val egyenlő. $0 < \beta < \pi$ miatt $\sin \beta \neq 0$, egyszerűsíthetünk vele, s így azt kapjuk, hogy

$$(2) \quad \cos \beta = 2 \cos \alpha \cdot \cos \gamma.$$

Most belátjuk, hogy (2) ekvivalens azzal, hogy $\sin 2\alpha$, $\sin 2\beta$, $\sin 2\gamma$ (ilyen sorrendben) számtani sorozatot alkot, tehát

$$(3) \quad \sin 2\alpha + \sin 2\gamma = 2 \cdot \sin 2\beta.$$

A (3) bal oldalát szorzattá alakítjuk, majd felhasználjuk, hogy $\sin(\alpha + \gamma) = \sin \beta$, a jobb oldalon pedig a kétszeres szög szinuszára vonatkozó összefüggést használjuk. Így kapjuk, hogy

$$2 \cdot \sin \beta \cdot \cos(\alpha - \gamma) = 4 \cdot \sin \beta \cdot \cos \beta.$$

Egyszerűsítünk $2 \cdot \sin \beta$ -val (ami nem 0), majd mindkét oldalból levonunk $\cos \beta$ -t:

$$\cos(\alpha - \gamma) - \cos \beta = \cos \beta.$$

Tudjuk, hogy $-\cos \beta = \cos(\alpha + \gamma)$. Ha ezt beírjuk a bal oldalra, és alkalmazzuk az addíciós tételt, ekkor azt kapjuk, hogy

$$2 \cdot \cos \alpha \cdot \cos \gamma = \cos \beta,$$

ami nem más, mint (2).

Lépéseink megfordíthatók, így (2) valóban pontosan akkor igaz, ha $\sin 2\alpha$, $\sin 2\beta$, $\sin 2\gamma$ (ebben a sorrendben) számtani sorozat, és éppen ezt akartuk bizonyítani.

II. megoldás. Tegyük fel, hogy az ABC háromszög szögeire teljesül (1). Ekkor a háromszög nem lehet derékszögű, hiszen mindhárom szögének van tangense. Megmutatjuk, hogy ekkor a háromszög tompaszögű sem lehet. Ha ugyanis β tompaszög, akkor a másik két szög hegyes, és így $\text{tg } \beta < 0$, $\text{tg } \alpha > 0$ és $\text{tg } \gamma > 0$, márpedig ekkor (1) nem állhat fenn. Ha viszont például α tompaszög, akkor (1) bal oldalát $\text{tg } \alpha + \text{tg } \gamma = -\text{tg}(\beta + \gamma) + \text{tg } \gamma$ alakba írva γ , $\beta + \gamma$ egyaránt 0 és $\pi/2$ közé esik, tehát $\text{tg}(\beta + \gamma) > \text{tg } \gamma$, s így a bal oldal negatív, míg $\text{tg } \beta > 0$, hiszen α és β nem lehet egyszerre tompaszög.

1986-12-439-1.eps

Ha tehát (1) igaz, akkor az ABC háromszög hegyesszögű. Legyen O a köré írt körének középpontja, M a magasságpontja, T a B -ből induló magasságának talppontja és F az AC oldal felezőpontja (ábra). Ekkor M is, O is a háromszög belsejében van és $\angle AMT = \angle BCA = \gamma$, $\angle CMT = \angle BAC = \alpha$ (mert merőleges szárú szögek), tehát

$$\text{tg } \alpha + \text{tg } \gamma = \frac{CT}{TM} + \frac{TA}{TM} = \frac{CA}{TM}.$$

Másrészt a kerületi és középponti szögek tétele miatt $\angle AOC = 2\beta$, így a fele, $\angle AOF = \beta$, tehát

$$\text{tg } \beta = \frac{AF}{FO} = \frac{AC}{2FO}.$$

(1) tehát a $\frac{CA}{TM} = \frac{AC}{FO}$ azaz $TM = FO$ alakba írható. Minthogy O és M AC -nek ugyanazon a partján van, és MT párhuzamos OF -fel (mindkettő merőleges AC -re), ezért azt kaptuk, hogy (1) pontosan akkor igaz, ha a hegyesszögű ABC háromszögben OM , a *háromszög Euler egyenese párhuzamos AC -vel*.

Az Euler-egyenesen az S súlypont is rajta van, s ennek távolsága AC -től $\frac{1}{3}BT = \frac{m_b}{3}$, ezért az Euler egyenes pontosan akkor párhuzamos AC -vel, ha $OF = \frac{m_b}{3}$ is fennáll. Az Euler egyenes párhuzamossága tehát egyenértékű azzal, hogy az AOC háromszög területe harmada az ABC háromszög területének:

$$(4) \quad 3t_{AOC} = t_{ABC}.$$

Másrészt hegyesszögű háromszögben $t_{ABC} = t_{AOC} + t_{COB} + t_{BOA}$, ahonnan (4) szerint azt kapjuk, hogy

$$(5) \quad 2t_{AOC} = t_{COB} + t_{BOA}.$$

Miután pedig $t_{AOC} = \frac{1}{2}r^2 \sin 2\beta$, $t_{COB} = \frac{1}{2}r^2 \sin 2\alpha$ és $t_{BOA} = \frac{1}{2}r^2 \sin 2\gamma$, az (5) egyenletet $\frac{r^2}{2}$ -vel végigosztva, éppen a kívánt

$$2 \sin 2\beta = \sin 2\alpha + \sin 2\gamma$$

egyenlőséget kapjuk.

Megjegyzés. Könnyű belátni, hogy a bizonyítás lépései megfordíthatók, tehát hegyesszögű háromszögben az alábbi négy állítás ekvivalens:

1. $\operatorname{tg} \alpha + \operatorname{tg} \gamma = 2 \cdot \operatorname{tg} \beta$.
2. Az Euler-egyenes párhuzamos az AC oldallal.
3. $t_{AOB} + t_{BOC} = 2t_{AOC}$.
4. $\sin 2\alpha + \sin 2\gamma = \sin 2\beta$.

Nem nehéz megmutatni, hogy tompaszögű háromszögben e négy állítás egyike sem lehet igaz.