

Mivel a lefedés egyenlő hosszúságú szakaszokkal is megoldható, nyomban ezt bizonyítjuk.

A lefedni kívánt ABC háromszög leghosszabb oldala (vagy ezek egyike) legyen AB . Az AB oldalhoz tartozó magasság T talppontja AB belső pontja. A lefedő szakaszok hosszát (d) e magassággal megegyezőnek választjuk. A szakaszrendszer valamennyi elemének egyik végpontja az AB oldalra illeszkedik, másik végpontja pedig az AC vagy a BC oldalon van.

1987-04-150-1.eps

1. ábra

Mivel a csúcspontok hovatarozása az oldalakat illetően nem egyértelmű, a háromszög csúcsait lefedő szakaszokat külön adjuk meg. Az A csúcsot fedje az AC oldalon fekvő AD szakasz, a B csúcsot a BC oldalon fekvő BE szakasz, a C csúcsot pedig a CT magasság szakasz. (D és E az AC , ill. BC oldalnak az A , ill. B csúctól d távolságra levő pontja. D és E létezik, mivel $AC > d$ és $BC > d$.) (1. ábra).

A lefedéshez diszjunkt szakaszok rendszerét kell megadnunk, ezért a lefedő szakaszok végpontjai kölcsönösen meghatározzák egymást. Így pl. ha a C csúcsot a CT szakasszal fedjük le, a T pont lefedésére ugyancsak a CT szakaszt írjuk elő.

A szakaszrendszer elemeinek AB -re illeszkedő, A -tól, B -tól és T -tól különböző végpontját a továbbiakban P_t , a másik végpontját R_t jelöli. R_t aszerint legyen az AC vagy a BC oldalon, hogy P_t az AT vagy a BT szakasz belső pontja.

1987-04-150-2.eps

2. ábra

E megszorítás mellett is előfordul, hogy valamely P_t -hez két megfelelő R_t pont található. Ezért kikötjük még, hogy az $R_t P_t T \triangleleft$ legyen hegyesszög. Így már bármely P_t -hez egy és csak egy R_t tartozik. Mivel $K_t P_t < d < C P_t$, a $K_t C$ szakasz egy és csak egy R_t pontot tartalmaz, amelyre $R_t P_t = d$ (2. ábra). Az $R_t P_t T \triangleleft$ nyilván hegyesszög. Itt jegyezzük meg, hogy valamennyi R_t pont a DC vagy az EC szakasz belső pontja. Ha pl. P_t az AT szakasz belső pontja, az $A P_t R_t$ háromszög P_t -nél fekvő belső szöge tompaszög. Ezért $A R_t > P_t R_t = d = AD$. R_t nem eshet a C csúcsba sem, mivel $P_t C > d$.

Különböző P_t pontokhoz nem tartozhat ugyanaz az R_t pont, ellenkező esetben létrejönne olyan egyenlő szárú háromszög, amelynek alapon fekvő szögei közül az egyik hegyesszög, a másik tompaszög volna. Így P_t és R_t kölcsönösen meghatározzák egymást.

A szakaszrendszer megadásánál tekintettel voltunk arra, hogy a háromszög határvonalának pontjaira egy és csak egy lefedő szakasz illeszkedjék; ahol szükséges volt, ezt be is bizonyítottuk. Már csak azt kell bizonyítanunk, hogy a háromszög lemez bármely belső pontján is egy és csak egy halad át szakaszaink közül.

Legyen először a vizsgált pont a CT magasság belső pontja. Ezen a CT magasság áthalad, más lefedő szakasz viszont nem, mivel a CT magasságon kívül minden lefedő szakasz benne van a CT egyenes által meghatározott felsíkok egyikében.

1987-04-151-1.eps

3. ábra

Tekintsük most az ATC háromszög valamely Q belső pontját (3. ábra). Állítsunk a Q ponton át merőlegest az AB oldalra. Ennek az ATC háromszögbe eső szakasza d -nél kisebb. A merőleges egyenest forgassuk a Q pont körül olyan irányba, hogy az AC egyenessel alkotott metszéspontja a C csúcshoz közeledjék. Az egyenesnek az ATC háromszögbe eső szakasza folytonosan és szigorúan monoton növekszik. (Ez egyszerűen belátható annak alapján, hogy tompaszögű háromszögben a tompaszöggel szemközti oldal a legnagyobb.) A QC egyenesnek a háromszögbe eső darabja már nagyobb d -nél. Ezért a mondott forgatás során az egyenes ACT háromszögbe eső szakasza egy és csak egy helyzetben lesz d hosszúságú. Ez a szakasz az általunk megadott szakaszrendszer eleme.

A BTC háromszög belső pontjaira ugyanígy végezhetjük a bizonyítást.

A feladat megoldását ezzel befejeztük.

Megjegyzés. A megoldásban lényegében azt használtuk fel, hogy egy *derékszögű háromszög* – az ATC , illetve a BTC – lefedhető a megadott módon a befogójával – a TC -vel – egyenlő hosszúságú szakaszokkal. Az alábbiakban egy korábbi feladat eredményét felhasználva igazoljuk ezt az állítást.

A 2316. gyakorlat megoldásában (lásd az 1986. novemberi számban, a 385–386. oldalon) megmutattuk, hogy egy $2r$ sugarú K kör kerületén, annak belsejében csúszás nélkül gördülő r sugarú k kör kerületének tetszőleges pontja a K egy átmérőjén mozog.

4. ábra

Tekintsük az ATC háromszöget a körülírt körével együtt – legyen ez a k kör – és foglaljuk ezt a kétszeres sugarú K körbe a 4. ábrán látható módon. Ekkor tehát az A pont a K középpontjába esik, a két kör pedig a C pontban érinti egymást.

Rögzítsük ebben a helyzetben az ATC háromszöget, a k kört pedig a CT húrjával együtt gördítsük a K kerületén addig a helyzetig, amíg a T pont – amely az idézett állítás szerint az AT átmérőn mozog – a kör középpontjába, A -ba jut.

Mivel a C pont eközben a CA átmérőn mozog, a k -val együtt mozgó CT húr éppen az előírt módon „söpri végig” az ATC háromszöget.