

A (2)-ben szereplő xy , yz , valamint zx mennyiségekre, mint új ismeretlenekre vezessük be az A , B , C jeleket. Ezekkel (2) így alakul:

$$(2') \quad A + B + C = 1.$$

(1)-ből tudjuk, hogy x , y , z nullától különböznek; ezzel a feltétellel új gyök nyerése nélkül (1)-et megszorozhatjuk (xyz) -vel:

$$3(x^2yz + yz) = 4(y^2xz + xz) = 5(z^2xy + xy).$$

Az itt szereplő összes tag könnyen kifejezhető A , B , C -vel, például $x^2yz = (xy)(xz) = AC$, tehát (1)-ből

$$(1') \quad 3(AC + B) = 4(AB + C) = 5(BC + A).$$

A zárójelben álló tényezők (2') segítségével szorzattá bonthatók. Például (2')-ből $B = -A - C + 1$, tehát

$$AC + B = AC - A - C + 1 = (A - 1)(C - 1),$$

s hasonlóképpen a többi. Tehát

$$(1'') \quad 3(A - 1)(C - 1) = 4(A - 1)(B - 1) = 5(B - 1)(C - 1),$$

s (2')-ből

$$(2'') \quad (A - 1) + (B - 1) + (C - 1) = -2.$$

Ezzel az eredetinel lényegesen egyszerűbb egyenletrendszert kaptunk az $u = A - 1$, $v = B - 1$, $w = C - 1$ mennyiségekre:

$$(3) \quad 3uw = 4uv = 5vw, \quad u + v + w = -2.$$

A kettős egyenlőség egyértelműen meghatározza u , v és w arányát (feltéve persze, hogy egyik sem nulla), ennek alapján a másik egyenlőség pedig értéküket.

Vegyük észre, hogy míg (3)-ig eljutottunk, igyekeztünk az egyenletek „szimmetriáját” megőrizni – például új ismeretlent vezetünk be xy , yz és zx helyébe is; (1)-et nem bontottuk két egyenletre; vagy (1')-ben nem A , B , C valamelyikét helyettesítettük a (2')-ből kiadódó értékkel, hanem mindhármát. Továbbá lényegesen kihasználtuk, hogy (2) jobb oldalán éppen 1 áll, ám az (1)-ben szereplő 3, 4, 5 számok helyére tetszőlegesen írva megoldásunk (legalábbis eddig a pontig) működik.

Térjünk vissza (3)-hoz. Láttuk, hogy két eset van:

- a) u , v , w közül valamelyik nulla;
- b) u , v , w egyike sem nulla.

Ez utóbbi esetben a korábban mondottak szerint meghatározhatjuk u , v és w arányát:

$$u : v : w = 5 : 3 : 4;$$

és így (3) második egyenletéből $u = -5/6$, $v = -3/6$, $w = -4/6$; vagyis $A = xy = u + 1 = 1/6$, $B = yz = v + 1 = 1/2$, $C = xz = w + 1 = 1/3$. Ezek az értékek természetesen kielégítik az (1')–(2') egyenletrendszert; továbbá $ABC = x^2y^2z^2 = 1/36$, tehát $xyz = 1/6$ vagy $-1/6$. Innen tovább az első esetben

$$x = \frac{xyz}{yz} = \frac{xyz}{B} = \frac{1}{3}, \quad y = \frac{xyz}{C} = \frac{1}{2}, \quad z = \frac{xyz}{A} = 1;$$

a másodikban

$$x = -\frac{1}{3}, \quad y = -\frac{1}{2}, \quad z = -1,$$

s mindkettő természetesen megoldása az eredeti egyenletrendszernek is.

Hátra van még az a) eset, vagyis ha u , v , w között van nulla. Ekkor (3) szerint mindhárom kettes szorzat értéke nulla, tehát u , v és w között legalább két nulla van – és ekkor a harmadik értéke -2 . Ez azt jelenti, hogy A , B , C közül kettőnek értéke 1, egynek értéke pedig -1 . Így $ABC = -1$, ami $ABC = x^2y^2z^2$ -tel összevetve azt mutatja, hogy innen nem adódik új megoldás.

Összefoglalva, az egyenletrendszernek két megoldása van: $(1/3, 1/2, 1)$, illetve $(-1/3, -1/2, -1)$.