

I. megoldás. Be fogjuk látni, hogy tetszés szerinti számú, megfelelő e egyenest lehet megadni. Másképpen mondva: lehetne további követelményt is előírni az e egyenesre, például azt, hogy az egyik adott egyenest, a -t, egy előírt P pontban messe. P -ként a -nak csak két különleges helyzetű pontját nem választhatjuk.

1986-12-437-1.eps

1. ábra

Legyen a kocka alaplapja $ABCD$, oldalélei AE , BF , CG , DH és válasszuk a három, páronként kitérő élegyenes szerepére $AB = a$ -t, $FG = b$ -t és $DH = c$ -t (1. ábra). Legyen a -nak A -tól és B -től különböző, egyébként tetszőleges pontja P . Így a P pont és a b egyenes meghatározta S sík biztosan metszi c -t, nem lehet párhuzamos vele. Ha ugyanis S -et b körül forgatjuk, ez csak abban a helyzetben párhuzamos c -vel, amikor tartalmazza a c -vel párhuzamos GC egyenest, tehát ha S azonos a kocka $GCBF$ lapsíkjával, ennek viszont a -val közös pontja a kizárt B csúcs.

Jelöljük S és c közös pontját Q -val. Ekkor PQ egyenes mindig megfelel e szerepére, amihez csak azt kell belátunk, hogy a PQ egyenes b -t is metszi. Mivel P is, Q is benne van az S síkban, elegendő megmutatnunk, hogy PQ nem lehet párhuzamos b -vel. Az előbbihez hasonlóan okoskodunk. Minden olyan egyenes, amely párhuzamos b -vel és metszi c -t, benne van az $EHDA$ lapsíkban, amelyet egyrészt c , másrészt a b -vel párhuzamos EH egyenes határoz meg. PQ csak akkor volna párhuzamos b -vel, ha azonos lenne az AD egyenessel, ezt pedig szintén kizártuk azzal, hogy P különböző A -tól.

P -t végigfuttatva az AB egyenesen, a két kizárt esettől eltekintve mindig megfelelő PQ egyenest kapunk.

Megjegyzés. Nem használtuk ki, hogy az egyenseinket szolgáltató kocka 3 élránya páronként merőleges egymásra, sem azt, hogy a kitérő párok közti legrövidebb távolságok (normáltranszverzálisok) egyenlő hosszúak. Lényegében ugyanígy megy a megoldás tetszőleges három, páronként kitérő egyenes esetében, amilyenek például a Gy. 2373. gyakorlat a_1 , a_2 , a_3 egyenesei.

II. megoldás. Elegendő megadnunk egyetlen megfelelő egyenest. Az előbbi jelöléseket használjuk. Vetítsük az a , b , c egyeneseket merőlegesen az $ABCD$ lap síkjára, a vetülete önmaga, b -é a BC egyenes, c -é pedig a D pont. Tükrözzük D -re a -t, legyen a képe a' , és messe ez BC -t K -ban, továbbá legyen K öse a tükrözésben az L pont (2. ábra). Vetítsük most „vissza” K -t b -re, így kapjuk az M pontot. Az LKM háromszög LK oldalának felezőpontja éppen D , így DH e háromszög egyik középvonalának egyenese, tehát metszi az LM oldalt (N pont). Ez pedig azt jelenti, hogy az LM egyenes megfelelő, hiszen az a , b , c egyenesek mindegyikét metszi.

1986-12-437-2.eps

2. ábra