

Mivel a bal oldal értéke nem függ az a, b, c, d, e számok előjelétől, a jobb oldal pedig nem csökken, ha mindegyik előjelét pozitívvá változtatjuk, elég a fenti egyenlőtlenséget pozitív a, b, c, d, e számokra bizonyítani.

A négyzetes és a számtani közép közti egyenlőtlenséget kétszer, vagy a negyedik hatványközép és számtani közép közti egyenlőtlenséget felhasználva:

$$(1) \quad N = \sqrt[4]{\frac{\left(\frac{a}{b}\right)^4 + \left(\frac{b}{c}\right)^4 + \left(\frac{c}{d}\right)^4 + \left(\frac{d}{e}\right)^4 + \left(\frac{e}{a}\right)^4}{5}} \geq \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{e} + \frac{e}{a}}{5} = A.$$

Másrészt a számtani és mértani közép közti egyenlőtlenség szerint a *pozitív* $\frac{a}{b}, \frac{b}{c}, \frac{c}{d}, \frac{d}{e}, \frac{e}{a}$ számokra:

$$(2) \quad A = \frac{\frac{a}{b} + \frac{b}{c} + \frac{c}{d} + \frac{d}{e} + \frac{e}{a}}{5} \geq \sqrt[5]{\frac{a}{b} \cdot \frac{b}{c} \cdot \frac{c}{d} \cdot \frac{d}{e} \cdot \frac{e}{a}} = 1.$$

Azt kaptuk tehát, hogy $N \geq A \geq 1$. Ezekkel a jelölésekkel a bizonyítandó állítás az

$$5N^4 \geq 5A$$

alakba írható. De $N \geq 1$, mint láttuk, így $N^4 \geq N$, másrészt (1) szerint $N \geq A$, tehát

$$N^4 \geq N \geq A, \quad \text{és így} \quad N^4 \geq A,$$

azaz $5N^4 \geq 5A$ valóban. Egyenlőség pontosan akkor van, ha

$$\frac{a}{b} = \frac{b}{c} = \frac{c}{d} = \frac{d}{e} = \frac{e}{a}, \quad \text{azaz} \quad a = b = c = d = e.$$

Megjegyzés. A feladat nyilván általánosítható: ha k, n pozitív egészek, k páros, akkor

$$\sum_{i=1}^n x_i^k \geq \sum_{i=1}^n x_i,$$

feltéve, hogy $x_1 x_2 \dots x_n = 1$.