

Legyen az $A_1B_1C_1$ háromszög területe t , az ABC háromszögé T , a csonka gúla magassága m .

1986-11-373-1.eps

Ismeretes, hogy a csonka gúla alapjai hasonlóak, és a hasonlóság aránya $\sqrt{t/T}$. Ugyancsak hasonlóak az $ABCP$ és $A_1B_1C_1Q$ tetraéderek, hiszen alapjaik pl. a csonka gúla ABC és $A_1B_1C_1$ „párhuzamos helyzetű” alapjai, oldaléleik pedig Q származtatása révén párhuzamosak, továbbá a Q pont az $A_1B_1C_1$ sík A , B , C -vel ellentétes oldalán van. A hasonlóság aránya itt is $\sqrt{t/T}$. E két tetraéder közül az előbbi magassága m , így az utóbbié $m \cdot \sqrt{t/T}$. Ezért az $ABCQ$ tetraéder magassága $m + m \cdot \sqrt{t/T}$, tehát térfogata $T(m + m \cdot \sqrt{t/T})/3 = m(T + \sqrt{Tt})/3$.

Az ABB_1A_1C gúla térfogata a csonka gúla $m(t + \sqrt{t/T} + T)/3$ és az $A_1B_1C_1C$ tetraéder $tm/3$ térfogatának különbsége, vagyis $m(t + \sqrt{Tt} + T)/3$. Tehát a két test térfogata valóban egyenlő.

Megjegyzés. A feladatban leírt csonka gúla speciális esetben hasáb, és ekkor nem egészíthető ki gúlává. A közölt megoldásban nem használtuk ki a gúla csúcsának létezését, amint azt számos megoldónk tette.