

Az egyenlet akkor értelmes, ha  $\operatorname{tg}(\pi \operatorname{tg} x)$  és  $\operatorname{ctg}(\pi \operatorname{ctg} x)$  értelmes, azaz ha  $\operatorname{tg} x$  értelmes és nem egyenlő  $\left(l + \frac{1}{2}\right)$ -del, ahol  $l$  egész, továbbá  $\operatorname{ctg} x$  értelmes és nem egész szám.

Felhasználva a  $\operatorname{ctg} \varphi = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \varphi\right)$  összefüggést, (1)-ből a

$$(2) \quad \operatorname{tg}(\pi \operatorname{tg} x) = \operatorname{tg} \left(\frac{\pi}{2} - \pi \operatorname{ctg} x\right) \quad \text{egyenletet kapjuk.}$$

Két szám tangense pontosan akkor egyenlő, ha a számok különbsége  $\pi$  egész számú többszöröse, így (2) pontosan akkor igaz, ha

$$(3) \quad \begin{aligned} \pi \operatorname{tg} x - \left(\frac{\pi}{2} - \pi \operatorname{ctg} x\right) &= k\pi, \quad \text{azaz} \\ \operatorname{tg} x + \operatorname{ctg} x &= k + \frac{1}{2}, \end{aligned}$$

ahol  $k$  tetszőleges egész szám.

Az (1) egyenletnek tehát pontosan azok az  $x$  valós számok a megoldásai, amelyekre valamilyen  $k$  egészszel fennáll (3), mégpedig úgy, hogy nincsenek olyan  $l, m$  egész számok, amelyekre a  $\operatorname{tg} x$ -re kapott érték  $l + \frac{1}{2}$  vagy  $\frac{1}{m}$  alakú.

A (3) egyenlet a  $\operatorname{tg} x$ -re vonatkozó másodfokú egyenletté írható át, ennek megoldása

$$(4) \quad \operatorname{tg} x = \frac{k + \frac{1}{2} \pm \sqrt{\left(k + \frac{1}{2}\right)^2 - 4}}{2} = \frac{2k + 1 \pm \sqrt{4k^2 + 4k - 15}}{4}.$$

Az egyenletnek csak a  $D = 4k^2 + 4k - 15 \geq 0$  esetben van megoldása, így (4)-ben  $k \geq 2$  vagy  $k \leq -3$ .

Még kell még vizsgálnunk, van-e  $k$ -nak olyan értéke, amelyre (4) jobb oldala  $\operatorname{tg} x$ -re kizárt, tehát  $l + \frac{1}{2}$  vagy pedig  $\frac{1}{m}$  alakú. Nézzük meg,  $k$ -nak milyen értékeire kaphatjuk egyáltalán *racionális* megoldását a (3) egyenletnek. Ez nyilván pontosan akkor teljesül, ha (4)-ben a négyzetgyök alatt teljes négyzet áll, hiszen egy egész szám négyzetgyöke vagy maga is egész, vagy pedig irracionális.

Ha  $D = 4k^2 + 4k - 15 = (2k + 1)^2 - 16$  egész szám négyzete, akkor – mivel 8-nál nagyobb abszolút értékű számok esetén már szomszédos számok négyzetének különbsége is legalább 17 –,  $|2k + 1| < 8$ . A  $k$ -ra kapott korábbi megszorítások figyelembevételével innen  $k$  lehetséges értékei 3, 2 vagy pedig  $-3$  és  $-4$ .

Ha  $k = 2$  vagy  $-3$ , akkor  $D = 3^2$ ,  $k = 3$ -ra  $D = 33$ . Ez azt jelenti, hogy ha  $k > 2$  vagy  $k < -3$ , akkor (4) jobb oldala irracionális, és így nem lehet a kizárt értékek egyikével sem egyenlő.

Ha  $k = 2$ , akkor (4)-ben a két gyök 2 és  $\frac{1}{2}$ , ha pedig  $k = -3$ , akkor  $-\frac{1}{2}$  és 2 adódik  $\operatorname{tg} x$ -re. Az  $\frac{1}{2}$  és a  $-\frac{1}{2}$  értékeket kizártuk, a másik két lehetőség viszont megengedett.

Az (1) egyenlet megoldásait tehát a

$$(5) \quad \operatorname{tg} x = y$$

egyenlethalmaz megoldásaiként nyerjük, ahol  $y = -2$  vagy 2 vagy pedig

$$\frac{2k + 1 \pm \sqrt{4k^2 + 4k - 15}}{4}$$

alakú szám, ahol  $k > 2$  vagy  $k < -3$  tetszőleges egész.

Végül az (5) egyenlet minden  $y$  valós számra megoldható, a megoldások:

$x = \operatorname{arc} \operatorname{tg} y + n \cdot \pi$ , ahol  $n$  tetszőleges egész szám.