

**I. megoldás.** Legyen  $p = 2k + 1$  és  $q = 2k - 1$ . A  $(2k + 1)^m$  binomiális tétel szerinti kifejtésében az utolsó előtti tag  $m \cdot 2k$ , az utolsó pedig 1, a többi tag osztható  $(2k)^2$ -nel. Hasonló igaz  $(2k - 1)^n$ -re, csak ott az utolsó két tag  $n \cdot 2k$  és  $-1$ , hiszen  $n$  páratlan. Így

$$p^m + q^n = 4k^2 \cdot M + 2k(m + n),$$

ahol  $M$  egész,  $m + n$  pedig páros. Ebből már láthatjuk, hogy  $p^m + q^n$  osztható  $p + q = 4k$ -val.

**II. megoldás.** Írjuk a vizsgálandó összeget így:  $p^m + q^n = (p^m - p^n) + (p^n + q^n)$ , és tegyük föl egyelőre, hogy  $m \geq n$ . Ennek következtében  $m = n + 2k$ , ahol  $k$  nemnegatív egész. Ekkor  $p^m - p^n = p^n(p^{2k} - 1)$ , ami osztható  $(p^2 - 1)$ -gyel, és mivel  $p + 1$  páros,  $2(p - 1) = p + q$ -val is. Ezért az első zárójelben lévő különbség osztható  $(p + q)$ -val. Mivel  $n$  páratlan, a második zárójelben is  $(p + q)$ -val osztható szám áll, ezért igaz a feladat állítása. Hasonlóan okoskodhatunk az  $n > m$  esetben.

**III. megoldás.** Legyen  $p = 2k + 1$ ,  $q = 2k - 1$ . Ekkor

$$p^m - 1 = (p - 1)(p^{m-1} + \dots + 1);$$

$$q^n + 1 = (q + 1)(q^{n-1} - \dots + 1),$$

ahol mindkét felbontásban a második zárójelben páratlan szám áll, jelölje ezeket  $2r + 1$ , illetve  $2s + 1$ , ahol  $r, s$  egész számok. Most már

$$p^m + q^n = (p - 1) \cdot (2r + 1) + (q + 1) \cdot (2s + 1) = 2k(2r + 2s + 2) = 4k(r + s + 1),$$

ahol felhasználtuk, hogy  $p - 1 = q + 1 = 2k$ . Tekintve, hogy  $4k = p + q$ , igaz a feladat állítása.