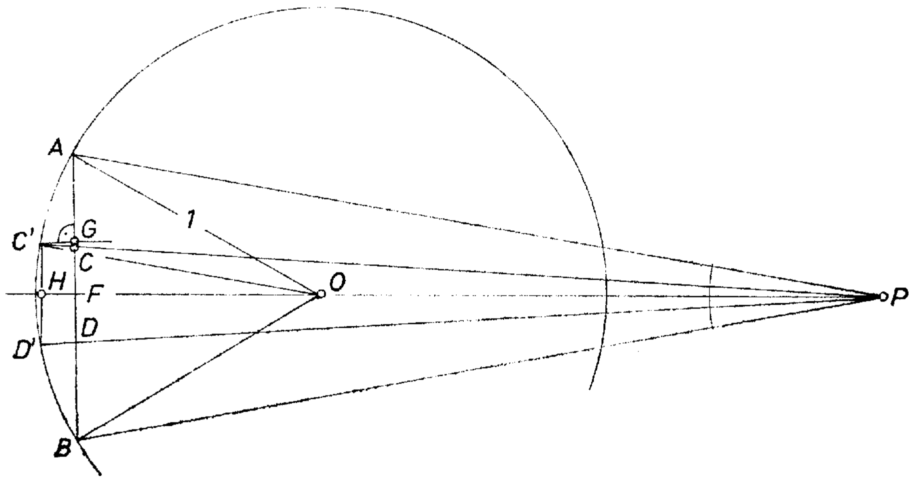
I. megoldás. Legyenek a húr harmadoló pontjai C és D, az ívéi C' és D'. Jelölje G a C' merőleges vetületét AB-n, és használjuk az ábra további jelöléseit is.



1. ábra

A kör sugara legyen egységnyi. A nyilvánvaló szimmetria miatt elegendő a keresett szög felét meghatározni. Ennek tangensét $AF = \frac{1}{2}$ alapján FP ismeretében kiszámíthatjuk. FP meghatározásához vegyük észre, hogy $GCC'\Delta \sim FCP\Delta$, hiszen megfelelő oldalaik párhuzamosak. Ezért

$$\frac{FP}{FC} = \frac{GC'}{GC}, \quad \text{azaz} \quad FP = FC \cdot \frac{GC'}{GC}.$$

Az itt szereplő szakaszok közül $FC = \frac{1}{6}$, a másik kettő pedig szögfüggvényekkel fejezhető ki:

$$GC' = FH = OH - OF = \cos 10^\circ - \cos 30^\circ = 2 \sin 10^\circ \sin 20^\circ,$$
$$GC = GF - CF = C'H - CF = \sin 10^\circ - \frac{1}{6}.$$

Mivel $\frac{1}{6} = \frac{1}{3} \cdot \sin 30^\circ$, így

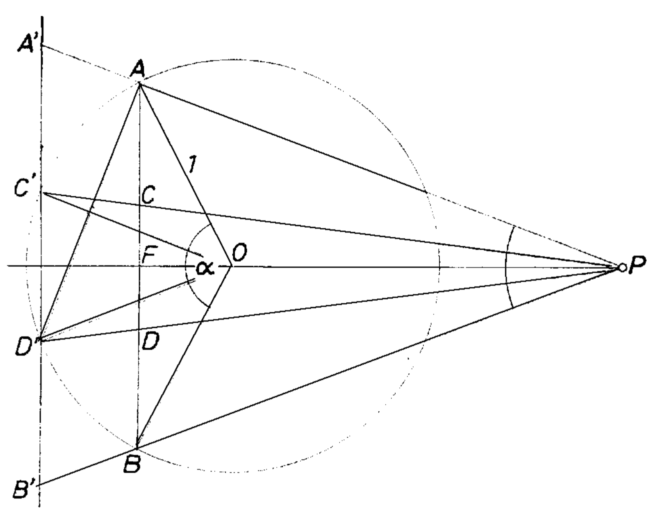
$$GC = \frac{1}{3}[2 \sin 10^\circ - (\sin 30^\circ - \sin 10^\circ)] = \frac{2 \sin 10^\circ}{3}(1 - \cos 20^\circ).$$

Innen

$$\operatorname{tg} APF\sphericalangle = \frac{AF}{FP} = \frac{AF}{FC} \cdot \frac{GC}{GC'} = \frac{3GC}{GC'} = \frac{1 - \cos 20^\circ}{\sin 20^\circ} = \operatorname{tg} 10^\circ.$$

Tekintve, hogy $APF\sphericalangle$ biztosan hegyesszög, $APF\sphericalangle = 10^\circ$, azaz $APB\sphericalangle = 20^\circ$.

II. megoldás. Legyen az AB húrhoz tartozó középponti szög α. A feladat állítását kissé általánosítva azt fogjuk megmutatni, hogy akármilyen AB húr esetén $APB\sphericalangle = \frac{\alpha}{3}$.



2. ábra

Vetítsük az A, B pontokat P-ből a $C'D'$ egyenesre. Ekkor $A'C' = C'D' = D'B'$, ezért az $AD'A'$ háromszögben C' az $A'D'$ oldal felezőpontja. Az OC' sugár felezi az AD' húrt, ugyanis C' az AD' ív felezőpontja. Ezért OC' az OAD' háromszög tengelye, felezi AD'-t, tehát egyszersmind középvonal az $AD'A$ háromszögben, és így párhuzamos $A'P$-vel. Hasonlóan kapjuk, hogy OD' párhuzamos $B'P$-vel. Ezért mint párhuzamos szárú szögek, $APB\sphericalangle = C'OD'\sphericalangle = \dfrac{\alpha}{3}$.