Látni fogjuk, hogy a feladat b) és c) állítása csak az $f > e(> 0)$ nagyságviszony mellett érvényes.

1986-11-365-1.eps

1. ábra

Legyen B és C vetülete AD-re B_0, ill. C_0, a C csúcs vetülete az ABD síkra C', és B vetülete a C_0C' egyenesre B_1 (1. ábra). Az ADB és DAC lapháromszögek egybevágók, mert ezen körüljárásaik szerinti első oldalpárjuk közös, a további kettő pedig a feltevés szerint egyenlő. Emiatt BB_0, CC_0 magasságaik is egyenlők.

Az adott $CC_0C'\sphericalangle = 60^\circ$ alapján a CC_0C' derékszögű háromszögből

$$C'C_0 = \frac{CC_0}{2} = \frac{BB_0}{2} = \frac{B_1C_0}{2},$$

hiszen $C'C_0$ merőleges AD-re és BB_1-re, tehát $BB_1 \parallel AD$. Eszerint C' felezi a B_1C_0 szakaszt, továbbá a CC_0B_1 háromszög egyenlő oldalú.

Másrészt C benne van a B_1C_0 szakasz felező merőleges síkjában, ez pedig azonos a BB_0 szakasz felező merőleges síkjával, tehát az adatok szerint

(1) $$B_0C = BC = e = DC.$$

1. Ha mármost $e = AB < DB = f$, akkor a közös befogójú BB_0A és BB_0D háromszögekből $B_0A < B_0D$, tehát B_0DC valódi háromszög és egyenlő szárú. Ebben a B_0D alapon fekvő szögek hegyesszögek, egyszersmind $BAD\sphericalangle$ is hegyesszög. Így C_0, B_0 az AD élszakaszon vannak és harmadolják azt. Jelöljük AD hosszát $3g$-vel, ekkor az ADC háromszögből

$$g = DC_0 = DC\cdot\cos CDA\sphericalangle = \frac{AD^2 - AC^2 + CD^2}{2\cdot DA} = \frac{9g^2 - (f^2 - e^2)}{6g},$$

és AD keresett kifejezése:

$$AD^2 = 9g^2 = 3(f^2 - e^2),$$

ami a most vizsgált esetben pozitív. Hozzátesszük, hogy mivel az $AD^2 = (f + e)(3f - 3e)$ felbontás első tényezője az ADB háromszög révén nagyobb, mint AD, azért a második tényezőre $AD < 3f - 3e$, és az $f + e > 3f - 3e$ egyenlőtlenségből $2e > f$ feltétele annak, hogy a háromszög létrejöhessen. Ugyanez az egybevágó BCA és BCD lapokból is kiadódik.

2. Ha viszont $e = AB > DB = f$, akkor $AB_0 > DB_0 = AC_0$. Így B_0 a C_0D félegyenesen van, másrészt (1) szerint C-től ugyanannyira, mint D, tehát B_0 azonos D-vel. Ezért az $ADB\sphericalangle = DAC\sphericalangle$ derékszög, tehát ekkor $AD^2 = AB^2 - BD^2 = e^2 - f^2$ (2. ábra). Ide kapcsoljuk mindjárt, hogy $e = f$ nem lehetséges. Akkor ugyanis C_0 egybeesnék B_0-lal, és B_1 a B-vel, így – hacsak $AD > 0$ –, $BB_0 = CB_0 < BA = e = BC$ lenne, és a $BB_0C\sphericalangle$ nem lehetne 60°-os.

1986-11-366-1.eps

2. ábra

Láttuk, hogy az 1. nagyságviszony mellett C_0 felezi a B_0D szakaszt, és $C_0C' \parallel B_0B$, így $C_0C' = B_0B/2$ éppen középvonala a BB_0D háromszögnek, tehát C' rajta van a BD élen (felezi azt). Így a BCD lap tartalmazza az ABD-re merőleges CC' egyenest, tehát maga is merőleges az ABD lapsíkra, ahogy a feladat állítja.

Ugyanez a tény az $AC = f$ élben metsződő lappárra abból adódik, hogy a testnek van olyan forgástengelye, amely körüli 180°-os elfordítással önmagába megy át. Ez a tengely az AD szakasz F felezőpontján megy át, merőleges az élre és benne van a $B(AD)C$ lapszöget felező síkban. Könnyen adódik az előzőkből, hogy a tengely a BC élt is felezi. Így az A és D, valamint a B és C csúcspárok egymás helyére fordulnak, és a BD élnél levő derékszögű lapszög az AC élnél levő lapszögbe megy át, az is derékszög.

(Az $e > f$ nagyságviszony esetében C' nincs rajta a BD szakaszon, előbbi érvelésünk alapja kiesik, nincs derékszög az f-élekben összefutó lappárok között. A forgástengely azonban ekkor is megvan.)

Rátérünk a c) állításra, de már csak az $e < f$ esetben. Az első alkalmas metsző sík a CC_0C', merőleges az AD élre. A DCC_0C' tetraédert a CC' tengely körül 180°-kal elfordítva D a B-be jut és C_0 a B_1 pontba, a CC_0C' síkmetszet helyben maradó és elforduló példányai együtt a CC_0B_1 szabályos háromszöget alkotják. A második síkmetszet pedig az a BB_0B', amelybe az első metszet az említett szimmetriával átmegy, tehát szintén merőleges AD-re, B' az AC él felezőpontja. Létrejön a BB_0G szabályos háromszög, egybevágó a CC_0B_1-gyel, és avval párhuzamos síkban fekszik, ezek az állítás szerinti hasáb alaplapjai; az oldalélek pedig B_0C_0, BB_1 és GC.

Megjegyzések. 1. A vizsgált típusú tetraéderek ($e < f$ esetén) könnyű példát nyújtanak testátdarabolásra. Bolyai Farkas tétele szerint bármely *két egyenlő területű, egyenes vonalú síkidom véges sok lépésben átdarabolható egymásba, ezzel szemben a térben általában nem lehetséges ez* két egyező térfogatú, síklapokkal határolt test között, csak bizonyos szoros feltételek mellett.

2. A térszemlélet gyakorlásául hozzáfűzzük: az ADB és DAC lapok a testtel együtt átmennek egymásba, tehát *egyező körüljárásúan* egybevágók, ha a testre mindkétszer *kívülről* nézünk rá. Az 1. ábrán viszont ADB és DAC ellentétes körüljárásúak. Ez abból adódik, hogy ott a DAC lapra kívülről nézünk rá, míg az ABD lapra a test belseje felől.