

I. megoldás. Legyen a kör középpontja O , a harmadoló pontok a köríven C és D , az OC , OD egyenes és az AB egyenes metszéspontja pedig rendre E , F .

Az $ABCD$ és az $EFCD$ négyszög szimmetrikus az AB húr felező merőlegesére, ezért EF és CD párhuzamosak (mindkét szakasz merőleges a szimmetriatengelyre), ezenkívül $EA = BF = AB$, mert a feladat feltétele szerint $EA + BF + AB = 3AB$. A DOC és FOE háromszögek így nyilván hasonlóak; a következőkben meghatározzuk ennek a hasonlóságnak az arányát.

1986-10-301-1.eps

1. ábra

A körbe írt AOD , DOC , COB egyenlő szárú háromszögekben a szárszögek egyenlőek, mert D és C harmadolópontok, így a három háromszög egybevágó. Emiatt $AD = DC = CB$ és $ADO\angle = ODC\angle = OFA\angle$. A DAF háromszög tehát egyenlő szárú: $AF = AD$. Az $AFCD$ négyszög tehát rombusz, továbbá a DOC és FOE háromszögek hasonlóságának aránya innen

$$DC : FE = AF : FE = 2AB : 3AB = 2 : 3.$$

Ennek alapján már megszerkeszthető egy megfelelő A , B pontpár. Az O középpontú, r sugarú k körön tetszőlegesen kijelöljük a D pontot. Az F pont a DO egyenes és az O középpontú $\frac{3}{2}r$ sugarú kör O -n túli metszéspontja. Az A és C pontokat a DF felező merőlegesének és a k körnek a metszéspontjaiként kapjuk, hiszen egy négyszög pontosan akkor rombusz, ha átlói merőlegesen felezik egymást. Mivel DF átmérő, ezért valóban rombuszt kapunk. Végül a B pont a k kör és az AF egyenes metszéspontja.

A fenti okoskodás megfordításával belátható, hogy a kapott A , B pontpár kielégíti a feladat feltételeit.

II. megoldás. 1. Jelöljük a keresett AB ívhez tartozó kisebbik középponti szöget $AOB\angle = 6x$ -szel – ahol tehát $0^\circ < 6x < 180^\circ$ –, ebből számítás alapján adunk jellemzést A -ra, B -re. Az I. megoldás jelöléseit használjuk, legyen még AB felezőpontja M . Így OM az ábra szimmetriatengelye, M az EF szakaszt is felezi, F a B -nek 3-szoros nagyítása az M centrumból.

A nagyobbik AOB szög mértékszámát $360^\circ - 6x$, ennek harmada $AOD\angle = 120^\circ - 2x$, így $MOD\angle = 3x + (120^\circ - 2x) = 120^\circ + x$, és ennek kiegészítő szöge $MOF\angle = 60^\circ - x$, hegyesszög. Az $EF = 3AB$ követelményből

$MF = 3MB$, azaz $\operatorname{tg}(60^\circ - x) = 3\operatorname{tg}(3x)$, és ismert azonosságok alapján

$$\frac{\sqrt{3} - \operatorname{tg} x}{1 + \sqrt{3} \operatorname{tg} x} = \frac{3\operatorname{tg} x(3 - \operatorname{tg}^2 x)}{1 - 3\operatorname{tg}^2 x},$$

majd szorzattá alakításokkal, $\operatorname{tg} x = u$ jelöléssel

$$\frac{\sqrt{3} - u}{1 + \sqrt{3}u} = \frac{3u(\sqrt{3} + u)}{1 - \sqrt{3}u} \cdot \frac{\sqrt{3} - u}{1 + \sqrt{3}u}.$$

A föltevés szerint $0^\circ < x < 30^\circ$, $0 < u < 1/\sqrt{3}$, így a bal oldali kifejezés, ami egyben a jobb oldal második tényezője is, pozitív szám. Ezért a jobb oldal első tényezője 1-gyel egyenlő. Ebből u -ra a következő egyenlet adódik:

$$3u^2 + 4\sqrt{3}u - 1 = 0,$$

ennek egyetlen pozitív gyöke pedig

$$(1) \quad u = \operatorname{tg} x = \frac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{3}}.$$

2. Bár ezzel már meghatároztuk az $AOB\angle = 6x$ szöget, mégis – a kérdés egyszerűségére tekintettel – szívesen látnánk az A , B pontoknak körzövel és vonalzóval való megszerkesztését is. Ez (1) alapján lehetséges ugyan, de meglehetősen hosszadalmas, helyette rövidebb úton először az OMF háromszöghöz hasonló szerkesztünk.

Főntebbi számításunk szerint

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} MFO\angle &= \operatorname{tg}(30^\circ + x) = \\ &= \frac{\frac{1}{\sqrt{3}} + \frac{\sqrt{5} - 2}{\sqrt{3}}}{1 - \frac{\sqrt{5} - 2}{3}} = \dots = \sqrt{\frac{3}{5}}. \end{aligned}$$

Legyen egy egyenesen $UM = 3$ egység, és folytatva $MV = 5$ egység, messe az UV átmérőjű kört az M -ben UV -re emelt merőleges W -ben, ekkor tüstént

$$\begin{aligned} \operatorname{tg} MVW &\triangleleft = \\ &= \frac{MW}{MV} = \frac{\sqrt{3 \cdot 5}}{5} = \operatorname{tg} MFO \triangleleft, \end{aligned}$$

tehát az MVW háromszög hasonló az 1. ábra MFO háromszögéhez. Most már az M -en átmenő, az UV -től különböző félegyenesre fölmérve az $MS = 1$, $MT = 3$ szakaszokat, az S -en átmenő és TV -vel párhuzamos egyenessel kimetsszük az MV szakasz H harmadoló pontját. W körül megrajzoljuk az adott körrel egyenlő sugarú kört, ebből WH kimetszi B -t, és ezen át UV -vel párhuzamost húzva kapjuk A -t.

B. T.

Megjegyzések. 1. Az (1)-nél egyszerűbb szerkesztések olvashatók ki a következőkből is:

$$\operatorname{tg} 3x = \sqrt{\frac{5}{27}}, \quad \sin 3x = \sqrt{\frac{5}{32}}, \quad \cos 3x = \sqrt{\frac{27}{32}},$$

de $5 + 27$ átmérőjű félkört kellene használnunk.

2. A két megoldás eredményeit azonosíthatjuk azáltal, hogy kiszámítjuk az I. megoldásból $\operatorname{tg} MFO \triangleleft = AN/NF$ értékét, ahol N az AC szakasz felezőpontja.