

Ha  $n$  vagy  $k$  értéke 1, akkor valamelyik számhalmazban egyetlen szám van. Ha ez a nulla, akkor valamennyi szorzat is nulla és így ekkor  $m = 1$ .

A továbbiakban föltehető, hogy  $n$  és  $k$  nagyobbak egynél. Tetszőleges  $k$ - elemű  $A_k$  és  $n$ - elemű  $B_n$  halmazok elemeit külön-külön növekvő sorba rendezve a lehetséges  $n \cdot k$  darab szorzatot írjuk be az 1. ábrán vázolt táblázat mezőibe.

1987-01-019-1.eps

### 1. ábra

A táblázat  $i$ -edik sorában ( $1 \leq i \leq k$ ) az  $A_k$   $i$ -edik elemének és a  $B_n$  elemeinek a szorzata, a  $j$ -edik oszlopában ( $1 \leq j \leq n$ ) pedig a  $B_n$   $j$ -edik elemének és az  $A_k$  elemeinek a szorzata áll.

Legfeljebb egy sor, illetve oszlop kivételével különböző számok állnak az egyes sorokban, illetve oszlopokban; ha  $A_k$  illetve  $B_n$  tartalmazza a nullát, akkor természetesen a megfelelő sor, illetve oszlop minden mezőjében nulla áll. Föltehető ugyanakkor, hogy  $A_k$ -ban és  $B_n$ -ben is szerepel a nulla, hisz egyébként egy-egy nem 0 elemet 0-val helyettesítve a különböző szorzatok száma nem nő.

1987-01-019-2.eps

### 2.a ábra

1987-01-019-3.eps

### 2.b ábra

A táblázatban a szorzatok előjelét is feltüntettük. Előfordulhat, hogy az egyik halmaz vagy akár mindkettő azonos előjelű számokból áll; a táblázat szerkezete ilyenkor ennek megfelelően módosul (2/a, b ábrák). Előbbi feltevésünk szerint viszont más eset lényegében már nincsen, ugyanis a 2. ábrák további változatai az  $A_k$ , illetve a  $B_n$  elemeinek  $(-1)$ -gyel való szorzásával kaphatók, és ilyenkor a különböző szorzatok száma nem változik. A 2/a ábrán az  $A_k$  halmaz nem tartalmaz egyidejűleg pozitív és negatív elemeket is, ugyanez természetesen a  $B_n$  halmazra is fennállhat, de a két lehetőség szimmetrikus volta miatt ez nem ad új eredményt.

A nullaszorzatok elhagyásával táblázatunk minden esetben négy (1. ábra), kettő vagy pedig egy (2/a, b ábrák) résztáblázatra bomlik úgy, hogy az egyes résztáblázatokban minden szorzat első, illetve második tényezője ugyanolyan előjelű. Vegyük észre, hogy egy  $u \times v$  méretű ilyen résztáblázat mindenképpen tartalmaz  $u + v - 1$  darab különböző számot, ennél többet azonban nem feltétlenül. Elegendő ezt abban az esetben igazolnunk, amikor a szorzatokat előállító tényezők mindegyike pozitív, a további esetekben a negatív tényezőket  $(-1)$ -gyel szorozva ilyen táblázathoz jutunk, és eközben nyilván nem változik a különböző szorzatok száma.

1987-01-020-1.eps

### 3. ábra

A tényezők növekvő elrendezése miatt a 3. ábra szaggatott útvonala mentén minden szorzat nagyobb, mint a megelőző, és így valóban  $u + v - 1$  különböző számot kapunk. (Ez egyébként bármely olyan  $u + v - 1$  hosszúságú útvonala mentén igaz, amelyik a bal felső sarokból vezet a jobb alsó sarokba). Ha pedig a kitöltést meghatározó tényezőket a 2 első  $u$ , illetve  $v$  darab hatványaként választjuk, akkor a szorzatok a  $2^2$  és a  $2^{u+v}$  közé eső 2-hatványok, és így a táblázatban éppen  $u + v - 1$  darab különböző szorzat szerepel.

Vegyük most szemügyre ennek alapján az 1, 2/a és 2/b ábrák lehetőségeit. Korábbi megjegyzéseink szerint elegendő ezeknek az eseteknek a vizsgálata.

A 2/b ábra egyetlen „résztáblájában” a fentiek szerint legalább  $1 + (n - 1) + (k - 1) - 1 = n + k - 2$  a különböző szorzatok száma – a 0-val együtt – és mivel ez a leírt módon meg is valósítható,  $m \leq n + k - 2$ .

A 2/a ábrán a két résztáblázat ellenkező előjelű szorzatokat tartalmaz, így a részekből egy-egy különböző elemű maximális szorzathalmazt egyesítve továbbra sem kaphatunk egyenlő számokat. Az előbbiek szerint tehát a táblázatban ekkor a 0-val együtt legalább  $1 + 2(k - 1) + (n - 1) - 2 = n + 2k - 4$  (vagy a szimmetrikus esetben  $k + 2n - 4$ ) különböző szorzat szerepel. Miután pedig  $k \geq 2$  (és  $n \geq 2$ ), az ilyen esetekben is van legalább  $n + k - 2$  különböző a létrejövő szorzatok között.

Meg kell még vizsgálnunk, hogy az 1. ábra legáltalánosabb esetében is találhatunk-e mindig  $n + k - 2$  különböző szorzatot. Az ellenkező előjelű résztáblák különböző elemekből álló maximális szorzathalmazai most is egyesíthetők, a kérdés az, hogy a négyféle lehetőség legalább mekkora elemszámot biztosít.

Legyen az  $A_k$  halmazban  $k_1$  és  $k_2$ , a  $B_n$ -ben pedig  $n_1$  és  $n_2$  a negatív, illetve a pozitív elemek száma. ( $k_1 + k_2 = k - 1$  és  $n_1 + n_2 = n - 1$ , és most  $k_1, k_2, n_1, n_2$  pozitív mennyiségek.)

A korábbiak szerint az egyes negyedek ilyenkor egyenként legalább  $P_1 = k_1 + n_1 - 1$ ,  $N_1 = k_1 + n_2 - 1$ ,  $P_2 = k_2 + n_2 - 1$ , illetve  $N_2 = k_2 + n_1 - 1$  darab különböző számot tartalmaznak. Az első és a harmadik esetben ezek a számok Pozitívak,

a további kettőben pedig Negatívak. Táblázatunk így biztosan tartalmaz annyi egymástól és a 0-tól különböző számot, amennyi a négyféle lehetséges  $P_i + N_j$  összeg maximuma.

A négy mennyiség összege  $2(P_1 + P_2 + N_1 + N_2) = 4(k + n - 4)$ , így a négyük maximuma legalább ennek egynegyede,  $k + n - 4$ , azaz a 0-val együtt most is létezik legalább  $n + k - 3$  különböző szorzat.

Vegyük észre azonban, hogy a négy mennyiség maximuma akkor lesz éppen az összegük egynegyede, ha mind a négy mennyiség egyenlő. Ez pedig esetünkben pontosan akkor igaz, ha  $P_1 = P_2$  és  $N_1 = N_2$ , azaz  $k_1 = k_2$  és  $n_1 = n_2$ . Ezek az egyenlőségek pedig csak úgy állhatnak fenn, ha  $k$  is és  $n$  is páratlan számok. Ebben az esetben viszont meg is adhatók az  $A_k$  és a  $B_n$  halmazok úgy, hogy a különböző szorzatok száma éppen  $n + k - 3$  legyen. Ehhez az szükséges, hogy a négy résztábla méretei egyenlők legyenek, az egyes résztáblákban ne legyen a minimálisnál több különböző szorzat, ezenkívül a két pozitív, illetve a két negatív résztábla ugyanazokat a szorzatokat tartalmazza.

Ez megvalósítható, ha

$$(*) \quad \begin{aligned} A_k &= \left\{ -2^{\frac{k-1}{2}}, -2^{\frac{k-3}{2}}, \dots, -2, 0, 2, \dots, 2^{\frac{k-3}{2}}, 2^{\frac{k-1}{2}} \right\} \quad \text{és} \\ B_n &= \left\{ -2^{\frac{n-1}{2}}, -2^{\frac{n-3}{2}}, \dots, -2, 0, 2, \dots, 2^{\frac{n-3}{2}}, 2^{\frac{n-1}{2}} \right\}. \end{aligned}$$

Így ha  $k > 1$  és  $n > 1$  páratlan számok, akkor  $m = n + k - 3$ .

Ha viszont  $n$  és  $k$  közül legalább az egyik páros, akkor a  $P_i + N_j$  típusú összegek között vannak különbözők. Maximumuk ezért *nagyobb*, mint az összegük egynegyede, és így legalább  $n + k - 3$ . Ebben az esetben tehát a 0-val együtt most is van legalább  $n + k - 2$  darab különböző az  $n \cdot k$  darab szorzat között.

Eredményeinket összefoglalva a feladat kérdésére a következő választ adhatjuk: 1. Ha  $n = 1$  vagy  $k = 1$ , akkor  $m = 1$ ; 2. ha  $n > 1$ ,  $k > 1$  és mindkettő páratlan, akkor  $m = n + k - 3$  azaz a létrejövő  $n \cdot k$  szorzat között mindig van legalább  $n + k - 3$  különböző, és az  $A_k$  és a  $B_n$  halmazokat (\*) szerint választva éppen ennyi; 3. ha  $n > 1$ ,  $k > 1$  és legalább az egyikük páros, akkor  $m = n + k - 2$ , azaz a szorzatok között mindig van legalább  $n + k - 2$  különböző, és a 2/b ábra vizsgálatakor láttuk, hogy  $A_k$  és  $B_n$  megválasztható úgy, hogy a különböző szorzatok száma éppen ennyi legyen.