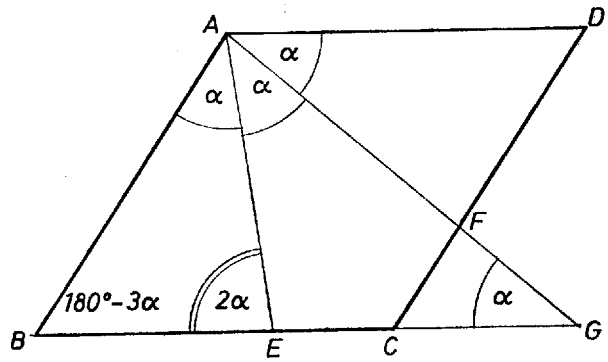
I. megoldás. *a)* Jelöljük a szögharmadoló egyenesek és a paralelogramma kerületének metszéspontjait E-vel, illetve F-fel. Mivel az AC átló felezi a paralelogramma területét, nem lehet mind a két pont ugyanazon az oldalon, hiszen ekkor az egyik rész területe legalább 1/2 volna. Legyen tehát E a BC, F pedig a CD oldalon. Messe AF a BC oldal meghosszabbítását G-ben (1. ábra).



1. ábra

Mivel $EAB\sphericalangle = FAD\sphericalangle$ és $EBA\sphericalangle = FDA\sphericalangle$, ezért az EBA és FDA háromszögek hasonlóak. Ha ennek a két háromszögnek egyenlő a területe, akkor egybevágóak. Ebből következik, hogy $AB = AD$, vagyis a szerkesztendő paralelogramma rombusz, továbbá $AE = AF$.

Az AFD háromszög területe a rombusz területének harmadrésze, az FD-hez, illetve CD-hez tartozó magasságuk közös, ezért az alapok aránya $FD : CD = 2 : 3$. Az ABG és FCG háromszögek hasonlóak, mert szögeik páronként egyállásúak. A megfelelő oldalak aránya:

$$FG : AG = FC : AB = FC : DC = (DC - DF) : DC = 1 : 3,$$

ebből $DF : DC = 2 : 3$ és $AF : AG = 2 : 3$, tehát

$$AE : AG = AF : AG = 2 : 3. \tag{1}$$

$EGA\sphericalangle = DAG\sphericalangle$, mert váltószögek, és $DAG\sphericalangle = EAG\sphericalangle$, mert AG és AE szögharmadolók, tehát $EGA\sphericalangle = EAG\sphericalangle$, az AEG háromszög egyenlő szárú, és (1) alapján ismerjük oldalainak arányát: $GE : EA : AG = 2 : 2 : 3$.

Szerkeszthetünk tehát egy az AEG háromszöghöz hasonló $A'E'G'$ háromszöget, és azt a következőképp egészíthetjük ki egy a szerkesztendőhöz hasonló $A'B'C'D'$ rombusszá: B'-t a $G'E'$ félegyenesből, az $A'G'$ egyenesnek $A'E'$-re vonatkozó tükörképe messe ki. Végül a $B'G'$ félegyenesre B'-ből felmérjük a $B'A' = B'C'$ hosszúságot, D'-re pedig $D'A' || B'C'$ és $D'C' || B'A'$. A B' metszéspont valóban létrejön, mert az $A'E'G'$ háromszög E'-nél tompaszögű, ugyanis az $A'G'$ oldal négyzete nagyobb, mint a másik kettő négyzetösszege: $9 > 8$.

A szerkesztés menetéből következik, hogy

$$D'A'G'\sphericalangle = A'G'B'\sphericalangle = E'A'G'\sphericalangle = B'A'E'\sphericalangle,$$

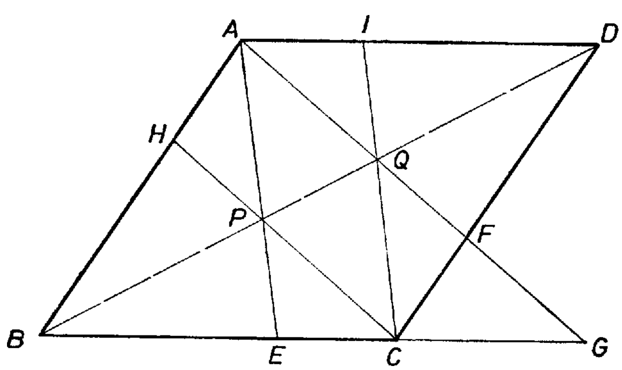
vagyis $A'E'$ és $A'G'$ szögharmadolók. Továbbá $A'E'$ felezi a $B'A'G'$ szöget, ezért:

$$B'E' : B'C' = B'E' : B'A' = G'E' : G'A' = 2 : 3.$$

Ebből következik, hogy a $B'A'E'$ háromszög területe valóban harmada a rombusz területének. Ez igaz az $A'F'D'$ háromszögre is, ahol F' az $A'G'$ és $C'D'$ szakaszok metszéspontja. Az $A'B'C'D'$ rombusz tehát a terület mértékszámára tett kikötés kivételével kielégíti a feladat feltételeit.

Legyen $A'B' = a$, a rombusz magassága pedig m. Területe ekkor am. Ha $A'B'C'D'$-t $1 : am$ arányú nyújtásnak vetjük alá, akkor a kapott $ABCD$ rombuszra a feladat minden feltétele teljesül. A magasságtétel alapján $\sqrt{am}$ szerkeszthető, így az egységszakasz ismeretében $ABCD$-t is meg tudjuk szerkeszteni.

Mivel két egyenlő területű és hasonló alakzat egybevágó, az is következik, hogy a megoldás egyértelmű.



2. ábra

b) Legyen a C-nél levő szög harmadoló vonalainak a kerületen levő pontja H, illetve I. Rombuszunk 7 részre esik szét, közülük 4, ill. 2 rész egybevágó, a hetedik ismét rombusz. Mivel $ABCD$ tengelyesen szimmetrikus, a megfelelő szögharmadolók a BD tengelyen metszik egymást, legyenek a metszéspontok P, illetve Q (2. ábra). Az *a)* rész alapján $BE=2EC$, a BEP és ECP háromszögek magassága megegyezik, ezért a BEP háromszög területe kétszerese az ECP háromszög területének. A BHP háromszög BEP tükörképe, ezért területük egyenlő. Az ECP háromszög területe tehát ötöde az $1/3$ területű BCH háromszögének. Ennek alapján már meghatározhatjuk a kérdéses területeket. A szimmetrikus helyzetű ECP, HAP, IAQ, FCQ háromszögek területe $1/15$ egység. Az ugyancsak tükrös helyzetű $EBHP$ és $IDFQ$ négyszögeké ennek négyszerese, $4/15$ egység. Végül a fennmaradó $AQCP$ négyszög területe $1-(12/15)=1/5$ egység.

II. megoldás a feladat *a)* részére (vázlat). Miután az I. megoldáshoz hasonlóan megállapítottuk, hogy a szerkesztendő négyszög rombusz és $BE:BC=BE:BA=2:3$, jelöljük a BAE szöget α-val. Ekkor $ABE\sphericalangle=180-3\alpha$, $AEB\sphericalangle=2\alpha$ (1. ábra). Írjuk fel a szinusztételt az ABE háromszögben:

$$\frac{\sin 2\alpha}{\sin\alpha}=\frac{BA}{(2/3)\cdot BA},$$

és ebből

$$\cos\alpha=\frac{3}{4}.$$

Ennek alapján α-t, mint egy 3 egység befogójú és 4 egység átfogójú derékszögű háromszög hegyesszögét meg lehet szerkeszteni. A továbbiakat nem részletezzük.