

Az egyenlőtlenség jobb oldala $a^{bc} \cdot b^{ac} \cdot c^{ab}$ alakú, tehát bc darab a , ac darab b és ab darab c tényező szorzata.

Alkalmazzuk erre az $(ab + ac + bc)$ darab (pozitív) számra a számtani és mértani közép közti összefüggést. Kapjuk, hogy

$$\frac{3abc}{ab + bc + ac} \geq \sqrt[ab+bc+ac]{a^{bc}b^{ac}c^{ab}}.$$

Itt nyugodtan $n = (ab + bc + ac)$ -edik hatványra emelhetünk, mert mindkét oldal pozitív és $x > 0$ -ra az x^n függvény szigorúan monoton nő:

$$(2) \quad \left(\frac{3abc}{ab + ac + bc} \right)^{ab+bc+ac} \geq a^{bc} \cdot b^{ac} \cdot c^{ab}.$$

Ha megmutatjuk, hogy

$$(3) \quad \left(\frac{3abc}{ab + ac + bc} \right)^{a^2+b^2+c^2} \geq \left(\frac{3abc}{ab + ac + bc} \right)^{ab+ac+bc}$$

akkor innen (2) alapján következik a bizonyítandó állítás.

Ismeretes, hogy $a^2 + b^2 + c^2 \geq ab + ac + bc$ (mert rendezés után az

$$1/2[(a - b)^2 + (b - c)^2 + (a - c)^2] \geq 0$$

egyenlőtlenségbe megy át). A p^x függvény $p \geq 1$ esetén monoton nő, (3)-hoz tehát elegendő, ha $p = \frac{3abc}{ab + ac + bc} =$

$$\frac{3}{\frac{1}{a} + \frac{1}{b} + \frac{1}{c}} \geq 1.$$

De ismeretes, hogy az a , b , c számok harmonikus közepe (ami éppen p), nem kisebb a , b , c közül legkisebbnél. Minthogy $a \geq 1$, $b \geq 1$, $c \geq 1$, ebből valóban $p \geq 1$, következik.

Ami az egyenlőséget illeti, (1)-ben pontosan akkor áll egyenlőség, ha (2)-ben is és (3)-ban is egyenlőség van. (2)-ben akkor és csak akkor van egyenlőség, ha mind az $(ab + bc + ac)$ darab szám egyenlő, azaz $a = b = c$. Ekkor $a^2 + b^2 + c^2 = ab + bc + ac$ is fennáll, tehát (3)-ban is egyenlőség van.