

I. megoldás. Az egyenlőség jobb oldala $(2y+1)^2+5$ alakba írható, soha nem kisebb tehát 5-nél és csak $y = -1/2$ -re lesz 5-tel egyenlő. Az egyenletnek tehát pontosan azokra az x -ekre van megoldása, amelyekre

$$(2) \quad \begin{aligned} 3 \sin x - 4 \cos x &\geq 5, \quad \text{azaz} \\ 3 \sin x &\geq 5 + 4 \cos x. \end{aligned}$$

A jobb oldal (2)-ben biztosan pozitív ($4 \cos x \geq -4$), tehát $\sin x > 0$. De ekkor az egyenlőtlenség mindkét oldala pozitív, így négyzetre emelhetjük. A kapott egyenlőtlenségbe beírva a $\sin^2 x = 1 - \cos^2 x$ azonosságot, rendezés után a

$$(3) \quad 0 \geq 16 + 40 \cos x + 25 \cos^2 x = (5 \cos x + 4)^2$$

egyenlőtlenséget kapjuk. Innen látszik, hogy (3) és így a vele ekvivalens (2) csak akkor teljesül, ha $\cos x = -\frac{4}{5}$.

Az (1) egyenletnek tehát pontosan azokra az x -ekre van megoldása, amelyekre $\sin x > 0$ és $\cos x = -\frac{4}{5}$, azaz $x = -\arccos \frac{4}{5} + (2k+1)\pi \approx 2,498 + 2k\pi$ (vagy fokban $x \approx 143,13^\circ + k \cdot 360^\circ$), ahol k egész. Ilyenkor (1) bal oldalának értéke 5, tehát a jobb oldalé is, így $y = -\frac{1}{2}$. Az egyenlet összes megoldását az $x = -\arccos \frac{4}{5} + (2k+1)\pi$, $y = -\frac{1}{2}$ számpárok adják (k egész).

A megoldás során egyben azt is bebizonyítottuk, hogy

$$(4) \quad 3 \sin x - 4 \cos x \leq 5$$

minden x -re és egyenlőség csak $\cos x = -\frac{4}{5}$ esetén áll.

II. megoldás. Az első megoldás végén kimondott állítást egy sokszor alkalmazható fogással is bebizonyíthatjuk. Írjuk (4)-et

$$\frac{3}{5} \sin x - \frac{4}{5} \cos x \leq 1$$

alakba. $\left(\frac{3}{5}\right)^2 + \left(\frac{4}{5}\right)^2 = 1$, tehát van olyan φ szög, amelynek koszinusza $\frac{3}{5}$, szinusza $\frac{4}{5}$ ($\varphi \approx 53,13^\circ$). Az egyenlőtlenség bal oldala tehát $\sin x \cos \varphi - \cos x \sin \varphi = \sin(x - \varphi)$ alakban írható, s ez valóban soha nem nagyobb 1-nél.

Ezzel beláttuk, hogy egyenletünk bal oldala legfeljebb 5, és láttuk, hogy jobb oldala legalább 5. Egyenlőség csak akkor állhat, ha

$$\begin{aligned} 4y^2 + 4y + 6 &= 5 \quad \text{azaz} \quad y = -\frac{1}{2}, \\ 3 \sin x - 4 \cos x &= 5 \quad \text{azaz} \quad \sin(x - \varphi) = 1, \end{aligned}$$

tehát $x = \varphi + \pi/2 + 2k\pi$ (k egész), ahol $\varphi = \arcsin 4/5 \approx 0,9273$.

Megjegyzés. A II. megoldás gondolatmenete általában azt adja, hogy

$$-\sqrt{a^2 + b^2} \leq a \cos x + b \sin x \leq \sqrt{a^2 + b^2}$$

minden x -re (a, b rögzített valós szám). Ha a is, b is nulla, ez világos. $a^2 + b^2 > 0$ esetén „végigosztunk” $\sqrt{a^2 + b^2}$, majd megkeressük az (egyik olyan) φ' -t, amelyre $\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \sin \varphi'$, $\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}} = \cos \varphi'$ (ilyen φ' van, mert $\left(\frac{a}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 + \left(\frac{b}{\sqrt{a^2 + b^2}}\right)^2 = 1$). Ekkor az egyenlőtlenség a

$$-1 \leq \sin \varphi' \cos x + \cos \varphi' \sin x = \sin(\varphi' + x) \leq 1$$

alakot ölti, ami nyilvánvalóan teljesül.