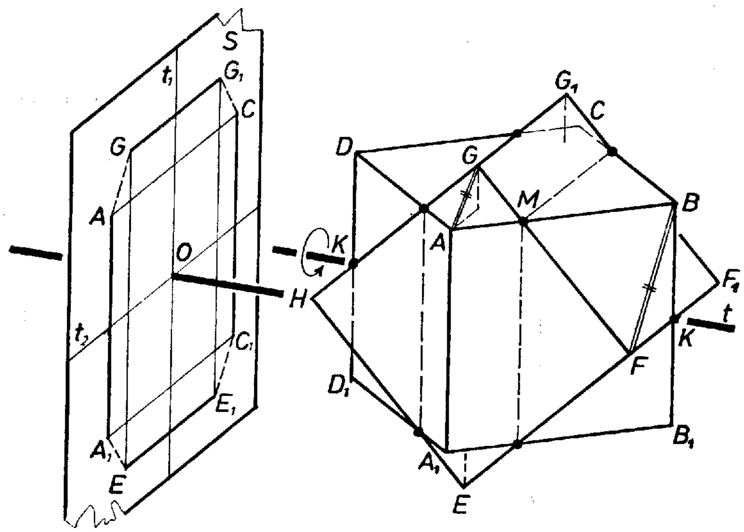
1. A leírt „átlós” metszetek egyértelműen meghatározzák az illető kockákat. Például mivel $AA_1 = a$, azért $AC = a\sqrt{2}$, és a téglalapot AC felező merőlegese körül derékszöggel elfordítva, megkapjuk a BDD_1B_1 metszetet. A metszetek közös O középpontja egyben a kockák közös centruma. A feladatban szereplő közös S sík mindkét kockának szimmetriasíkja. A feltételben említett forgatás térbeli t tengelye pedig – az O-n átmenő, S-re merőleges egyenes – a feladatban szereplő átlós metszetek olyan forgási szimmetriatengelye, amely körül $180°$-kal elfordítva önmagukba jutnak. Ezért t átmegy a BB_1 és DD_1, ill. FF_1 és HH_1 élek felezőpontjain, amelyeknek O-tól mért távolsága egyformán $AC/2 = a/\sqrt{2}$, tehát a két élpár $1-1$ tagja metszi egymást, metszéspontjuk K, ill. K_1 (1. ábra). A két kocka a t körüli $90°$-os elfordítással is átmegy egymásba.



1. ábra

A vizsgálandó test örökli a két kockától, hogy az S-re való tükrözés, valamint a t körüli $90°$-os elfordítások önmagába viszik át. Van még 2 további közös szimmetriasíkjuk is. Ezek a szimmetriák megkönnyítik a térfogatszámítást.

További metsző élpárok is vannak az alakzaton. Egy ilyen az 1. ábra betűzése mellett AB és GF – és további 7 szimmetrikus társ-élpár. Ugyanis az A, G, B, F csúcsok egy síkban vannak, mert az AG és FB egyenesek párhuzamosak. Jelöljük az AC és EG lapbeli átlók S-beli felező merőlegesét t_1-gyel, ill. t_2-vel, akkor AG párhuzamos e két újabb tengely egyik szögfelezőjével, és ugyanez érvényes FB-re is, mert BFB_1F_1 négyzet, és $BB_1||t_1$, $FF_1||t_2$.

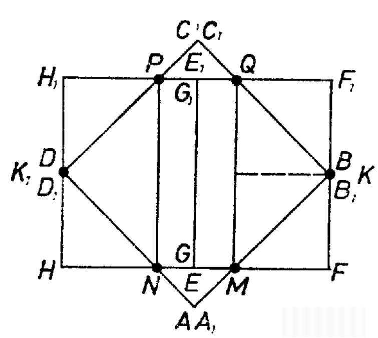
Eszerint az $AGBF$ négyszög trapéz és átlói egyenlők, $AB = FG = a$. Ezek metszéspontját M-mel jelöljük, és mindjárt kiszámítjuk $MA = MG$ és $MB = MF$ részeik hosszát. Az AG szakasz átfogó egy olyan egyenlő szárú derékszögű háromszögben, amelyben a befogók hossza $(EG-AA_1)/2 = a(\sqrt{2}-1)/2$, így $AG = a\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right)$. Hasonlóan $BF = \frac{a}{\sqrt{2}}$. Ezek szerint

$$AM : MB = AM : (a - AM) = AG : BF = \left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right) : \left(\frac{1}{\sqrt{2}}\right),$$

amiből

$$AM = a\left(1-\frac{1}{\sqrt{2}}\right), \quad BM = \frac{a}{\sqrt{2}}.$$

2. A térfogatszámításhoz az első kockából indulunk ki, és a másodikat odaképzelve leírjuk azokat a részeket és kiszámítjuk térfogatukat, amelyek az első kockából a másodikon kívülre esnek. Könnyű olyan nézeteket rajzolni az alakzatról, amelyekben a második kocka egy-egy lapját „élben” látjuk (a lap vetülete egyenes szakasz).

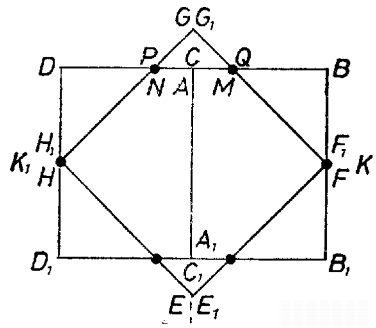


2. ábra

A 2. ábrán a nézőirány az AA_1 él, egyben a GE átló iránya, így a második kocka $EFGH$ és $E_1F_1G_1H_1$ lapjait egyenes szakaszoknak látjuk, és ezek az AMN és CQP egybevágó, egyenlő szárú derékszögű háromszögeket metszik le az első kocka nézetéből, amely csupán az $ABCD$ négyzet. Itt N és Q az M tükörképei az AC, ill. BD tengelyre nézve, P pedig e kettőnek közös képe ugyanezen tengelyekre.

Valójában egybevágó hasábokat metszenek le a síkok, az $EFGH$ lap által lemetszettnek az alapja az AMN háromszög, oldaléle (magassága) $AA_1 = a$, így e két hasáb együttes térfogata

$$2 \cdot \frac{1}{2} \cdot AM^2 \cdot AA_1 = a^3 \left(1 - \frac{1}{\sqrt{2}}\right)^2 = a^3 \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2}\right).$$



3. ábra

A 3. ábrán az AC átló és a GG_1 él a nézőirány, itt a második kocka további 4 lapját látjuk „élben", az első kockának pedig az $ABCD$ lapját és ami ezzel párhuzamos. A fönt megállapított szimmetria alapján elég azt a gúlát tekintenünk, amely a GF lapon kívül esik. Alaplapja az előző nézet szerint a BMQ egyenlő szárú derékszögű háromszög, negyedik csúcsa K, a BB_1 és FF_1 élek közös felezőpontja. Az alap területe $MQ^2/4 = a^2/4$, a magasság $BK = a/2$. Így a 4 egybevágó gúla térfogatának összege

$$4 \cdot \frac{1}{3} \cdot \frac{a^2}{4} \cdot \frac{a}{2} = \frac{a^3}{6}.$$

Számba vettük a levágásoknál a második kockának mind a 6 lapját. Az első kockából lemetszett részek térfogatának összege

$$a^3 \left(\frac{3}{2} - \sqrt{2} + \frac{1}{6}\right) = a^3 \left(\frac{5}{3} - \sqrt{2}\right),$$

ennélfogva a két kocka közös részének térfogata

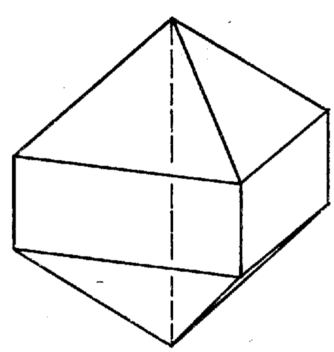
$$a^3 \left(1 - \frac{5}{3} + \sqrt{2}\right) = a^3 \left(\sqrt{2} - \frac{3}{2}\right) = a^3 \cdot 0,748$$

térfogategység.

Megjegyzések. 1. A fenti leírás után önállóan is leírhatjuk a közös részt. A $2 \cdot 6 = 12$ kockalap mindegyikéből egy-egy rész határolja. A t-re merőlegesen középen 4 téglalap (pl. $MNPQ$) egy hasábot határol, alapidoma a oldalú négyzet, magassága $MN = \sqrt{2} \cdot AM = a(\sqrt{2} - 1)$. Erre mindkét véglapján egy-egy négyoldalú gúla épül, magassága $a/2$, fele annyi, mint a BMQ háromszög MQ-ra merőleges magassága. Így a térfogat ismét

$$V = a^2 \left(MN + \frac{2}{3} \cdot \frac{a}{2}\right) = a^3 \left(\sqrt{2} - \frac{2}{3}\right).$$

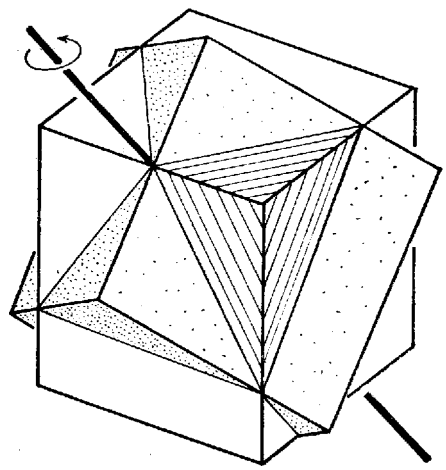
A maradéktest tengelyének hossza $2 \cdot OK = a\sqrt{2}$ (4. ábra).



4. ábra

2. Ha a 2. és 3. ábrákat úgy állítjuk egymáshoz képest, hogy az ACC_1A_1 metszetek élben látszó képei egy g egyenesbe essenek, akkor a két nézet tulajdonképpen az ábrázoló geometria elemeiben szokásos első és második kép. Méghozzá egymás tükrös képei egy a g-re merőleges képtengelyre, különben az egyes képeknek is két merőleges szimmetriatengelye van. Többen ilyen vetületpárból olvasták ki az AB és FG típusú élpárok metsződését, abból, hogy a két nézet látszólagos metszéspontjait összekötve, ez az egyenes párhuzamos g-vel, vagyis a két látszó kép ellenőrzi egymást, a metszés valóságos.

3. A bevezető számítás szerint $AMG\sphericalangle = 60°$. Vázoljuk ennek egy távolabbi kapcsolatát. A második kockát úgy is megkapjuk az elsőből, hogy 90°-kal elfordítjuk a BB_1 és DD_1 élek felezőpontjait összekötő KK_1 „éltengely" körül. Ugyanilyen forgatást végezve az AA_1 és CC_1-hez tartozó éltengely körül, ez a harmadik kocka ugyanolyan kölcsönös helyzetben lesz a másodikkal is, mint az elsővel, és a 3 kocka együttese többféle szimmetriával átvihető önmagába. Ebből értelmezhető a $60° = 180°/3$.



5. ábra