I. megoldás. A négyszög D csúcsánál levő szöge nyilvánvalóan $60°$. Így az ismert AD oldal végpontjainál levő szögek összege $138°$, kisebb, mint $180°$. Ezért az AB és DC félegyenesek metszik egymást egy M pontban és $AMD\sphericalangle = 42°$. Ez a szög egyben az ugyancsak adott BC oldalra támaszkodó BCM háromszögnek is alkotó része és ebben a további két szög $MBC\sphericalangle = 60°$ és $MCB\sphericalangle = 78°$. Ezekből kiszámíthatjuk M-nek mind a négy csúcstól való távolságát, majd alkalmas kivonással az AB és CD oldalakat. Elég lesz azonban pl. CD-t meghatározni, ezután már számíthatjuk az átlókat is.

1986-02-066-1.eps

1. ábra

1986-02-066-2.eps

2. ábra

A szinusztétel kétszeri alkalmazásával:

$$CD = MD - MC = \frac{AD \cdot \sin 78° - CB \cdot \sin 60°}{\sin 42°}.$$

Ezt ismerve a koszinusztétel kétszeri alkalmazásával az átlókra:

$$AC^2 = AD^2 + CD^2 - 2AD \cdot CD \cdot \cos 60°$$

és

$$BD^2 = BC^2 + CD^2 - 2BC \cdot CD \cdot \cos 102°.$$

A számításokat végrehajtva

$$CD = 71{,}50 \text{ egység}, \qquad AC = 96{,}68 \text{ egység}, \qquad BD = 109{,}20 \text{ egység}.$$

Ezzel megadtuk a kívánt választ.

Megjegyzések. 1. Számos versenyző a föntinél jóval bonyolultabb számítás útján jutott eredményre. Küzdöttek azzal, hogy a négyszög keresett átlóit berajzolva, semelyik részháromszögben sincs 3 ismert méret – (lásd pl. a II. megoldást). – Így a *trigonometria* (az ún. „általános” háromszög kiszámítása) egyik ismert tételével sem lehet elindítani a számítást.

Visszagondolva ezirányú tanulmányainkra, lényegében így álltunk olyankor is, amikor *derékszögű* háromszögben már tudtunk számolni, és először kerültünk szembe nem-derékszögű háromszögre vonatkozó feladattal. Akkor valamelyik magasság (pl. m_c) berajzolásával két derékszögű háromszöget hoztunk létre, majd a „nem is kérdezett” közös oldalt két irányból kifejezve tételeket kaptunk: $m_c = m_c$-ből a szinusztételt, $m_c^2 = m_c^2$-ből a koszinusztételt. Ezeket aztán *emlékezetünkbe* vésték, tétel-rangra emeltük, miután arról is meggyőződtünk, hogy derékszögnél nagyobb szögek mellett is érvényesek.

Itt is tovább lehet haladni hasonlóan. Aki újra és újra *négyszögszámítási* feladatokkal kerül szembe – például a geodézia (földmérés) alkalmazásaiban – , annak érdemes *tetragonometriai tétel*eket is keresnie és gyűjteményében őriznie. Az ilyen kapcsolatokban az várható, hogy a négyszögnek 6 mérete, adata forduljon elő, hiszen a négyszöget 5 adat határozza meg. Ez az egyszerű eset.

Példánkban az M segédpont és az ott keletkező szög, távolságok játszották az m_c előbbi segítő szerepét. Könnyű azonban egy általánosabb elvet is kiolvasni a CD-re kapott képletből. A négyszög szögeit sorra α, β, γ, δ betűvel jelölve, átrendezéssel a következő összefüggést kapjuk:

$$BC \cdot \sin\beta + CD\ \sin(\alpha + \delta) - DA \sin\alpha = 0,$$

és a kiolvasható tétel: az AB oldalra merőleges egyenest e-vel jelölve, az $ABCD$ négyszög irányított kerületének mint vektor-poligonnak az e-re való vetülete nullvektor. Ebben az összefüggésben 3 oldal és 3 szög szerepel, közülük 5 ismert, CD kiszámítható. A 2. ábra szerinti $B'C' + C'D' - D'A' = 0$ egyenletből számoltunk:

$$C'D' = CD \sin FCD\sphericalangle = CD \sin FCG\sphericalangle = CD \sin(360° - \beta - \gamma) = CD \sin(\alpha + \delta).$$

Az irányított kerületnek a sík bármely egyenesére a vetülete 0, speciálisan az AB egyenesre való vetülete is – továbbra is a 2. ábrához ragaszkodva

$$AB - BC \cos\beta + CD \cos(\beta + \gamma) - DA \cos\alpha = 0,$$

itt azonban 7 adat szerepel. Az e-re való vetítéskor az első tag elmarad. Ennek megfelelője háromszögben is megvan, 5 adat közti összefüggés: $AB = CB \cos\beta + CA \cos\alpha$.

Gyakorlati alkalmazásokban *zárt sokszög* helyett nyitott poligonok is szerepelnek – a *poligonometria* szótól sem ijednek meg. Nyitott poligonhoz utolsó tagként hozzá kapcsoljuk a végpontból a kezdőpontba vivő vektort.

2. Az 1. ábrán a négyszög megszerkesztését is vázoltuk, a lépések sorrendje: AB^* félegyenes, α, AD, δ felmérése, DM egyenes; B^*-ban β, majd $B^*C^* = BC$ és C^*-on át párhuzamos. (Több I. osztályos tanuló megjegyezte: „ezt csak szerkeszteni lehet”.)

3. Nem volt lényeges az eddigiekben, hogy a példában húrnégyszögről van szó. Az alábbi megoldás ezt is használja „fogódzóként”.

B.T.

II. megoldás. A négyszög húrnégyszög, mert szemben fekvő A, C csúcsainál levő szögeinek összege $180°$, így a D-nél levő szög $60°$.

1986-02-067-1.eps

3. ábra

Legyen a körülírt kör középpontja O, sugara r, az átlók O-ból vett látószöge $AOC\sphericalangle = 2 \cdot 60°$, $BOD\sphericalangle = 2 \cdot 78°$, és így az átlók

$$AC = 2r \sin 60° = \sqrt{3} \cdot r,$$
$$BD == 2r \sin 78°,$$

arányuk

$$\frac{AC}{BD} = \frac{\sqrt{3}}{2 \sin 78°}.$$

Az arány négyzetére még egy összefüggést kapunk, ha AC^2-re és BD^2-re felírjuk a koszinusztételt az ABC, ill. ABD háromszögből, az AB oldalt segédismeretlennek véve. Így másodfokú egyenletet kapunk AB-re:

$$\frac{AC^2}{BD^2} = \frac{AB^2 + 69^2 - 2 \cdot 69 \cdot AB \cdot \cos 120°}{AB^2 + 110^2 - 2 \cdot 110 \cdot AB \cdot \cos 78°} = \frac{3}{4 \sin^2 78°},$$

amiből elég nehéz számítással a pozitív gyök: $AB = 41{,}50$. Ezt AC^2 és BD^2 fölírt kifejezéseibe helyettesítve ismét $AC = 96{,}68$, $BD = 109{,}20$ egység. – Mellesleg $r = 55{,}9$.