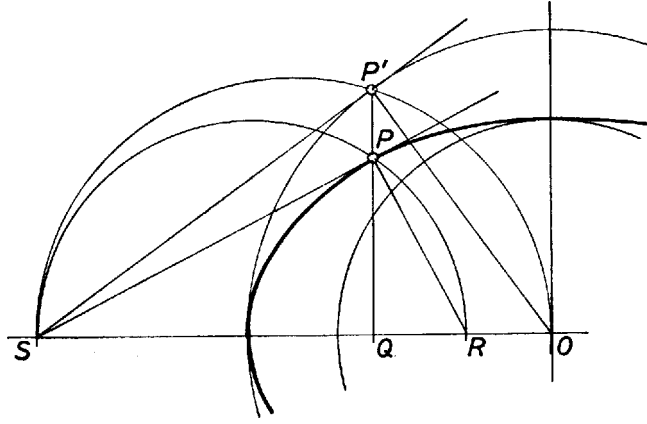


I. megoldás. Legyen az ellipszis kanonikus egyenlete $\frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$, a P pont koordinátái pedig x_1 és y_1 . Ekkor a további szereplő pontok koordinátái:

$$Q(x_1, 0), \quad R\left(\frac{x_1}{2}, 0\right), \quad O(0, 0).$$



Mivel P az ellipszis pontja : $\frac{x_1^2}{a^2} + \frac{y_1^2}{b^2} = 1$. Az ellipszis P pontjában húzott érintő egyenlete – mint ismeretes –

$$\frac{x_1}{a^2}x + \frac{y_1}{b^2}y = 1;$$

ennek normálvektora pedig $\mathbf{n}\left(\frac{x_1}{a^2}, \frac{y_1}{b^2}\right)$. A feladat feltételei szerint $\overrightarrow{RP}$ merőleges erre az érintőre, emiatt $\overrightarrow{RP} \parallel \mathbf{n}$. Van tehát olyan λ valós szám, amelyre $\overrightarrow{RP} = \lambda \mathbf{n}$.

Mivel $\overrightarrow{RP} = \overrightarrow{OP} - \overrightarrow{OR}$, azért $\overrightarrow{RP} = \frac{x_1}{2}\mathbf{i} + y_1\mathbf{j}$, és így

$$\frac{x_1}{2} = \lambda \frac{x_1}{a^2} \quad \text{és} \quad y_1 = \lambda \frac{y_1}{b^2}.$$

Kifejezve λ -t, kapjuk, hogy $\lambda = \frac{a^2}{2}$ és $\lambda = b^2$, így $a^2 = 2b^2$. Mivel a és b pozitív, ez azt jelenti, hogy $a = \sqrt{2}b$.

Eszerint valóban van olyan ellipszis, amelynek minden pontjára teljesül a feltevés – még nagytengelyének végpontjaira is –, és pedig minden ilyen ellipszis nagytengelye a kistengelynek a $\sqrt{2}$ -szöröse. Ennek érdekes következménye, hogy a két fókusz távolsága éppen a kistengely hosszával egyenlő.

Minden lépésünk megfordítható, így ez a feltétel elégséges is.

II. megoldás. Rajzoljuk meg az O középpontú, felnagytengely sugarú kört! Az ellipszis ennek a körnek a képe merőleges affinitással, ha az affinitás tengelyének a nagytengely egyenesét választjuk. Legyen P' a P -nek megfelelő pont a körön. Az ebben a pontban húzott körérintő és a P -beli ellipszisérintő a nagytengely egyenesén metszik egymást egy S pontban.

Az SPR derékszögű háromszöget a PQ magasságvonal két hasonló háromszögre bontja, amelyek oldalaira igaz, hogy

$$PQ : SQ = RQ : PQ, \quad \text{vagyis} \quad PQ^2 = SQ \cdot QR.$$

Ugyanígy az $SP'O$ derékszögű háromszögben :

$$P'Q : SQ = OQ : P'Q,$$

és mivel $OQ = 2RQ$, így $P'Q^2 = 2SQ \cdot QR$. Összevetve:

$$P'Q^2 = 2PQ^2, \quad \text{vagyis} \quad \frac{PQ}{P'Q} = 1/\sqrt{2},$$

az affinitás aránya tehát $1 : \sqrt{2}$.

Mivel a kistengely épp a kör átmérőjének képe az affinitás során, a nagytengely pedig a kör átmérője, ebben az ellipszisben a nagytengely $\sqrt{2}$ -ször akkora, mint a kistengely.