I. megoldás. Ha $f(x)$ jelöli az (1) bal oldalán álló polinomot, akkor tetszőleges $\alpha \neq 0$ -ra $f(x) = \alpha^6 \cdot f\left(\frac{1}{\alpha}\right)$, hiszen az f együtthatói „szimmetrikus" elrendezésűek. Mivel pedig (1)-nek nyilván nem gyöke a nulla, f-nek minden gyökével együtt annak reciproka is gyöke. A hat különböző gyök tehát az alábbi alakba írható : α, β,γ, $1/\alpha$, $1/\beta$, $1/\gamma$. Ennek megfelelően f gyöktényezős alakja:

$$f(x) = (x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma)\left(x-\frac{1}{\alpha}\right)\left(x-\frac{1}{\beta}\right)\left(x-\frac{1}{\gamma}\right). \tag{2}$$

Számítsuk ki a jobb oldali szorzatban a harmadfokú tag együtthatóját! x^3-ös tagot úgy kapunk a szorzat kifejtéséből, ha 3 zárójelből az első tagot, a többi 3-ból a másodikat vesszük. Ez $\binom{6}{3} = 20$-féleképpen lehetséges. A kiválasztások egymással reciprok párokba kapcsolhatók, mint pl. az első és az utolsó 3 zárójelből valók :

$$-\alpha\beta\gamma \quad \text{és} \quad -\frac{1}{\alpha\beta\gamma}.$$

A többi 9 pár egyik szorzatában $2+1$, ill. $1+2$ tényező van $f(x)$ első, ill. második feléből, a párok első tagjait a kis táblázat szerint szerkeszthetjük meg.

	$1/\alpha$	$1/\beta$	$1/\gamma$
$\alpha\beta$	β	α	$\alpha\beta/\gamma$
$\alpha\gamma$	γ	$\alpha\gamma/\beta$	α
$\beta\gamma$	$\beta\gamma/\alpha$	γ	β

Innen $c = c_1 + c_2$, ahol tehát

$$c_1 = -\left(\alpha\beta\gamma + 2\alpha + 2\beta + 2\gamma + \frac{\beta\gamma}{\alpha} + \frac{\gamma\alpha}{\beta} + \frac{\alpha\beta}{\gamma}\right)$$

és

$$c_2 = -\left(\frac{1}{\alpha\beta\gamma} + \frac{2}{\alpha} + \frac{2}{\beta} + \frac{2}{\gamma} + \frac{\alpha}{\beta\gamma} + \frac{\beta}{\gamma\alpha} + \frac{\gamma}{\alpha\beta}\right).$$

$c_1 + c_2$-ből $-\alpha\beta\gamma$-t kiemelve kapjuk, hogy

$$\begin{aligned} c = -\alpha\beta\gamma\Bigg(1 &+ \frac{1}{\alpha^2\beta^2\gamma^2} + \frac{1}{\alpha^2} + \frac{1}{\beta^2} + \frac{1}{\gamma^2} + \frac{2}{\beta\gamma} + \frac{2}{\alpha\gamma} + \frac{2}{\alpha\beta} + \\ &+ \frac{1}{\beta^2\gamma^2} + \frac{1}{\alpha^2\gamma^2} + \frac{1}{\alpha^2\beta^2} + \frac{2}{\alpha^2\beta\gamma} + \frac{2}{\alpha\beta^2\gamma} + \frac{2}{\alpha\beta\gamma^2}\Bigg) = \\ = -\alpha\beta\gamma&\left(1 + \frac{1}{\alpha^2\beta^2\gamma^2} + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha}\right)^2\right). \end{aligned}$$

Innen tehát

$$|c| = |\alpha\beta\gamma|\left|\left(1 + \frac{1}{\alpha^2\beta^?\gamma^2} + \left(\frac{1}{\alpha} + \frac{1}{\beta} + \frac{1}{\gamma}\right)^2 + \left(\frac{1}{\alpha\beta} + \frac{1}{\beta\gamma} + \frac{1}{\gamma\alpha}\right)^2\right)\right|,$$

és ha a második tényezőből elhagyjuk a háromtagú négyzeteket, akkor

$$|c| > |\alpha\beta\gamma| \cdot \left|1 + \frac{1}{\alpha^2\beta^2\gamma^2}\right| = \left|\alpha\beta\gamma + \frac{1}{\alpha\beta\gamma}\right|.$$

(Az utolsó lépésben kihasználtuk, hogy $\alpha\beta\gamma$ és $\frac{1}{\alpha\beta\gamma}$ egyező előjelűek.)

Azt kaptuk tehát, hogy

$$|c| > \left|\alpha\beta\gamma + \frac{1}{\alpha\beta\gamma}\right|.$$

Felhasználva, hogy bármely t valós számra $\left|t + \frac{1}{t}\right| \geqq 2$, a bizonyítandó állítást kapjuk abban az élesebb formában, hogy egyenlőség nem állhat fenn.

II. megoldás. Induljunk ki ismét a (2) alatti gyöktényezős felbontásból. Az első három tényezőt összeszorozva kapjuk, hogy

$$(x-\alpha)(x-\beta)(x-\gamma) = x^3 - px^2 + qx - r,$$

ahol

$$p = \alpha+\beta+\gamma, \qquad q = \alpha\beta+\beta\gamma+\gamma\alpha \qquad \text{és} \qquad r = \alpha\beta\gamma.$$

Hasonlóan a második három tényező szorzatára $x^3 - -Px^2 + Qx + R$ adódik, ahol

$$P = \frac{1}{\alpha}+\frac{1}{\beta}+\frac{1}{\gamma}, \quad Q = \frac{1}{\alpha\beta}+\frac{1}{\beta\gamma}+\frac{1}{\gamma\alpha} \quad \text{és} \quad R = \frac{1}{\alpha\beta\gamma}.$$

Vegyük észre, hogy

$$P = \frac{q}{r}, \quad Q = \frac{p}{r} \quad \text{és} \quad R = \frac{1}{r};$$

tehát

$$\left(x-\frac{1}{\alpha}\right)\left(x-\frac{1}{\beta}\right)\left(x-\frac{1}{\gamma}\right) = x^3 - \frac{q}{r}x^2 + \frac{p}{r}x - \frac{1}{r} = \frac{1}{r}(rx^3 - qx^2 + px - 1).$$

Eszerint $f(x) = \frac{1}{r}(x^3 - px^2 + qx - r)(rx^3 - qx^2 + px - 1)$. A harmadfokú tag együtthatójára innen

$$c = -\frac{1}{r}(p^2+q^2+r^2+1)$$

adódik.

Ennek alapján $|c| = \frac{1}{|r|}(p^2+q^2+r^2+1) \geqq \frac{1}{|r|}(r^2+1) = |r| + \frac{1}{|r|} \geqq 2$, ahogyan állítottuk.

Megjegyzések. 1. A második megoldás általánosítható. Könnyen megmutatható, hogy ha

$$(x-\alpha_1)(x-\alpha_2)\ldots(x-\alpha_n) = x^n + a_{n-1}x^{n-1} + \ldots + a_1x + a_0,$$

akkor

$$\left(x-\frac{1}{\alpha_1}\right)\left(x-\frac{1}{\alpha_2}\right)\ldots\left(x-\frac{1}{\alpha_n}\right) = \frac{1}{a_0}(a_0x^n + a_1x^{n-1} + \ldots + a_{n-1}x + 1),$$

és a két polinom szorzatában az n-edfokú tag együtthatója $\frac{1}{a_0}(a_0^2+a_1^2+\ldots+a_{n+1}^2+1)$. Mivel ennek a számnak legalább 2 az abszolút értéke, ezért ha egy $2n$-edfokú polinom főegyütthatója 1, a polinomnak $2n$ gyöke van, és minden gyök reciproka is gyök, akkor az n-edfokú tag együtthatójának abszolút értéke legalább 2.

Másfelől a „szimmetrikus”

$$x^{2n} + b_1x^{2n-1} + b_2x^{2n-2} + \ldots + b_nx^n + b_{n-1}x^{n-1} + \ldots + b_1x + 1 = 0 \tag{3}$$

polinom az első megoldásban látottak szerint rendelkezik a gyökökre vonatkozó fenti tulajdonsággal, így $|b_n| \geqq 2$.

2. A megadott feltételek mellett (1)-ben $c > 4$ is igaz, ez az eredmény azonban már nem élesíthető.