

I. megoldás. Ha f konstans függvény, akkor eleget tesz a feladat követelményének. Belátjuk, hogy más függvényre nem teljesül (1). Legyen ugyanis f a feladat követelményét teljesítő függvény, és legyen $a < b$. Osszuk fel az $[a, b]$ intervallumot n egyenlő részre: $x_0 = a$, $x_1 = a + \frac{b-a}{n}$, $\dots$, $x_j = a + j\frac{b-a}{n}$, $\dots$, $x_n = b$. Ekkor

$$(2) \quad |f(b) - f(a)| = \left| \sum_{i=0}^{n-1} f(x_{i+1}) - f(x_i) \right| \leq \sum_{i=0}^{n-1} |f(x_{i+1}) - f(x_i)|.$$

(Itt felhasználtuk, hogy f minden valós számra értelmezve van, továbbá az abszolút értékekre vonatkozó $|c_1| + \dots + |c_n| \leq |c_1| + \dots + |c_n|$ egyenlőtlenséget.)

A feltétel szerint

$$|f(x_{i+1}) - f(x_i)| \leq (x_{i+1} - x_i)^2 = \left(\frac{b-a}{n}\right)^2$$

$i = 0, 1, 2, \dots, n-1$ -re. Ezt (2)-be beírva

$$0 \leq |f(b) - f(a)| \leq n \left(\frac{b-a}{n}\right)^2 = \frac{(b-a)^2}{n}.$$

Mivel a kapott egyenlőtlenség minden n -re fennáll, $|f(b) - f(a)|$ nem lehet pozitív. Így $f(b) = f(a)$.

a és b tetszőleges volt. Így az f függvény értéke bármely két helyen megegyezik, tehát f valóban konstans, ahogyan állítottuk.

II. megoldás. Bebizonyítjuk, hogy a feladat kikötésének eleget tevő bármely f függvény mindenütt deriválható, és deriváltja azonosan nulla. Ugyanis a kikötés

$$\left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| \leq |x - y|$$

alakban írható. Ez tehát minden x, y -ra teljesül. Ha most x -et rögzítjük és y tart x -hez, akkor a jobb oldal nullához tart. A bal oldal nem negatív, tehát annak is nulla a határértéke. Azt kaptuk, hogy tetszőleges rögzített x -re

$$\lim_{x \rightarrow y} \left| \frac{f(x) - f(y)}{x - y} \right| = 0,$$

s innen

$$f'(x) = \lim_{y \rightarrow x} \frac{f(x) - f(y)}{x - y} = 0,$$

ahogy állítottuk.

Ismert tétel, hogy ha egy függvény mindenütt differenciálható, és differenciálhányadosa mindenütt nulla, akkor a függvény konstans. A feladat feltételének eszerint csak a konstans függvények tehetnek eleget, ezek pedig nyilván eleget is tesznek.

Megjegyzések. 1. A szereplő egyenlőtlenség helyett elég volna megkövetelni minden x, y számpárra az

$$|f(x) - f(y)| \leq (x - y)^{1+\varepsilon}$$

egyenlőtlenséget, ahol $\varepsilon > 0$, rögzített szám. Mindkét megoldás ugyanígy elmondható ebben az esetben is. A megoldásokban csak annyit használunk ki, hogy (1) jobb oldalán $(x - y)$ -nak olyan g függvénye áll, amelyre

$$\lim_{t \rightarrow 0} \frac{g(t)}{t} = 0.$$

2. Az első megoldás akkor is elmondható, ha f -ről csak annyit teszünk fel, hogy *egy* adott y érték mellett tetszőleges x -re teljesül (1).