

1. A p , q , s paraméterek rögzített előjeléből könnyű látni, hogy Q kívül van a parabolán, és rajta van ennek t tengelyén, az adott e egyenes pedig metszi a parabolát és merőleges t -re. Nincs a feladatnak olyan megoldása, amelyben a kérdéses $M_i(x_i, y_i)$, $i = 1, 2$ metszéspontok az adott e egyenesnek ugyanazon a partján lennének, hiszen akkor az M_1M_2 egyenes párhuzamos volna e -vel és merőleges t -re, emellett átmenne Q -n, így pedig nem metszhetné a parabolát, ellentmondásra jutnánk. Eszerint e elválasztja M_1 -et M_2 -től, és az M_1M_2 szakasz N felezőpontja nyilván rajta van e -n.

1985-11-369-1.eps

Legyen a keresett szelő iránytangense m (nyilván $\neq 0$), ekkor egyenlete $y = m(x - q)$. A két vonal egyenletéből az x_i abszcisszákra

$$(1) \quad \begin{aligned} m^2(x - q)^2 &= 2px, \\ x^2 - 2\left(\frac{p}{m^2} + q\right)x + q^2 &= 0, \end{aligned}$$

továbbá mivel N az e -n van,

$$(2) \quad \frac{x_1 + x_2}{2} = s.$$

Mindjárt magából az (1)-ből korlátozás olvasható ki m -re (vagyis már a p , q paraméter párból). Ahhoz, hogy M_1 és M_2 egyáltalán létrejöhessenek, a diszkrimináns $1/4$ részére teljesülnie kell:

$$\left(\frac{p}{m^2} + q\right)^2 - q^2 = \frac{p}{m^2} \left(\frac{p}{m^2} + 2q\right) \geq 0,$$

azaz

$$(3) \quad \frac{p}{m^2} + 2q \geq 0, \quad |m| \leq \sqrt{\frac{p}{-2q}}.$$

Ez eleve szükséges feltétel ahhoz, hogy az (1) és (2) *egyidejű* figyelembevételével kiszámítandó iránytangens megfelelhessen a feladat követelményének. (Egyenlőség esetén a két metszéspont egybeesik, az $y = \pm m(x - q)$ egyenesek érintik a parabolát.)

Az iránytangens meghatározásában mellőzhetjük x_1 és x_2 kiszámítását, hiszen a másodfokú egyenlet gyökei és együtthatói közti összefüggések alapján

$$x_1 + x_2 = 2\left(q + \frac{p}{m^2}\right),$$

tehát (2) figyelembevételével

$$\frac{p}{m^2} + q = s$$

amiből

$$(4) \quad |m| = \sqrt{\frac{p}{s - q}}.$$

Erre akkor teljesül (3) is, ha $s - q \geq -2q$, azaz $s \geq -q$ (> 0), vagyis ha $OE \geq QO$ – ahol E az x tengely és e közös pontja –, tehát ha az e egyenes legalább annyira van O -tól, mint a Q pont. Ha éppen $s = -q$, akkor (4) és (3) szerint éppen a két érintő felel meg a követelményeknek, M_1 , M_2 és N egybeesik az előírt e egyenesen.

2. A szelőt N pontjának kitűzésével szerkesztjük meg. Ordinátájának abszolút értéke: $EN = |y| = |m| \cdot (s - q) = \sqrt{p(s - q)} = \sqrt{p \cdot QE}$. Legyen a parabola fókuszja F – ez a parabolával együtt adottnak tekintendő –, ekkor $OF = p/2$. Mérjük fel E -től QE meghosszabbítására az $EG = 2 \cdot OF = p$ szakaszt és messük e -t a QG átmérőjű körrel. Ekkor a derékszögű háromszög középarányos tételei szerint a metszéspont N . Ezzel a megoldást befejeztük.

Megjegyzések. 1. Érdekes meglátásokra jutunk, ha a szelőt valamelyik M_i alapján próbáljuk megközelíteni, vagyis az x_i , y_i koordinátáin át. Az x_i abszcisszákra (1)-ből, (2) figyelembevételével

$$(1a) \quad x^2 - 2sx + q^2 = 0.$$

Szerkesztésükhöz vegyük O tükörképét E -re nézve, legyen ez H , akkor $OH = 2s = x_1 + x_2$, másrészt forgassuk el Q -t O körül derékszöggel a K pontba, vagyis $OK = |q| = \sqrt{x_1x_2}$. Ezek alapján az OH átmérő fölötti Thalész-kör és a K -n átmenő, az x -tengellyel párhuzamos egyenes K_1 , K_2 metszéspontjainak abszcisszái x_1 és x_2 . K_i létezésének feltétele ebből ismét $|q| \leq s$.

Gondolhatnánk: már csak ez van hátra: M_i -t kimetszhetjük a parabolából a K_i -n átmenő és az x tengelyre merőleges e_i egyenessel. Ámde adott parabola és adott egyenes esetében metszéspontjuk „leolvasása” elvileg egészen más

feladat, mint pl. adott kör és adott egyenes esetében! A parabolából – egyenlete alapján – tetszés szerinti számú pontot szerkeszthetünk ugyan, de csak véges számút. A parabolaív csupán olyasféle *összekötése* pontoknak, mint egy függvénygrafikon. Annyiból talán mégis több, hogy tetszőleges – most x_i – abszcisszájú pontját egyformán szerkeszthetjük a *definíció* alapján.

Legyen F tükörképe O -ra D , itt megy át a d vezéregyenes; és legyen K_i vetülete az x tengelyre K'_i . Ekkor M_i -nek F -től való távolsága annyi, mint d -től, azaz DK_i , tehát M_i kimetszhető e_i -ből az F körüli $DK'_i = x_i + p/2$ sugarú körrel. – Lehetne x_i alapján (ismét mértani középárányos útján) az $y_i = \sqrt{2px_i}$ hosszúságot is szerkeszteni: x_i végpontjától jobbra felmérve a $2p$ szakaszt stb.

2. Mivel a K_i pontokat (1a)-ból csak s és $|q|$ felhasználásával megszerkeszthettük, vagyis p felhasználása nélkül, azért ezt is mondhatjuk: K_i az adott s , q paraméterpárból ($s \geq |q|$ esetén) *minden* $p > 0$ értékhez előkészíti a szerkesztést. Az adott p -t csak a második lépésben használjuk.