Jelölje Q a térnek azt a pontját, amelyet a tetraéder lapsíkjaira tükrözünk. Lássuk el a tetraéder lapsíkjait sorszámmal, és Q_i jelentse a Q-nak az i-edik lap síkjára vonatkozó tükörképét ($i = 1, 2, 3, 4$). Ha a tükörképek mind különbözők és nem esnek egy síkba, akkor valóban meghatároznak egy gömböt. (A feladat szövegét úgy értelmezzük, hogy mindez teljesül.)

Ez más szóval azt jelenti, hogy Q nem illeszkedik egyidejűleg több lapsíkra, továbbá nincs rajta a tetraéder körülírt gömbjén sem. Ha ugyanis a pont a tetraéder valamelyik élegyenesére illeszkedik, akkor a különböző tükörképek száma 4-nél kevesebb, másfelől egy ismert tétel szerint egy pontot egy tetraéder lapsíkjaira tükrözve a tükörképek egy síkba esnek, ha az eredeti pont rajta van a tetraéder körülírt gömbjén. Minden más esetben 4 különböző tükörképet kapunk, amelyek nem esnek egy síkba. Mivel az általunk meghatározott gömb középpontja P, sugara pedig r, azért $PQ_i = r$ ($i = 1, 2, 3, 4$).

Ha most a P pontot tükrözzük a tetraéder lapsíkjaira, akkor a P_i pontokat kapjuk. Mivel P_i és Q_i az ugyanarra a lapsíkra vonatkozó tükrözéssel keletkeznek P-ből, illetve Q-ból, így a P_iQ szakasz a PQ_i szakasznak az i-edik lapsíkra vonatkozó tükörképe. Ez azt jelenti, hogy

$$P_iQ = PQ_i \quad (i = 1, 2, 3, 4).$$

A PQ_i szakaszok hossza az előzőek szerint r-rel egyenlő, ezért a P_i pontok is egy r sugarú gömbön vannak rajta, amelynek középpontja Q.

Megjegyzés. A feladat kitűzésekor szándékunk szerint ennek bizonyítását kértük. A dolgozatokból az derült ki, hogy a beküldők így is fogták fel a feladatot. Látnunk kell azonban, hogy nyitva maradt az a kérdés, hogy P tükörképei egyáltalán meghatároznak-e gömböt, ahogyan az „új gömb" kifejezés sugallja. P tükörképei között lehetnek ugyanis egybeesők, de e nélkül is eshetnek egy síkba. Előfordulhat tehát, hogy nincs „új gömb", hanem a tükörképekre illeszkedő sík (síkok), valamint gömbök végtelen sokasága jön létre, amelyek között található r sugarú is.

Nem volna érdektelen annak elemzése, hogy ez pontosan mikor következik be. Ezt most nem végezzük el, csupán egy fontos speciális esetet említünk, amely szemlélteti az itt leírtakat.

Q pontnak válasszuk a tetraéder egyik lapjának belső pontját. A Q_i pontok ekkor mind különbözők és nincsenek egy síkban. Az általuk meghatározott gömb P középpontja a tetraédernek éppen a Q pontot tartalmazó lapjával szemközti csúcsa. Ily módon a P tükörképei közül három egybeesik, azaz mindössze két különböző P_i pontunk van.