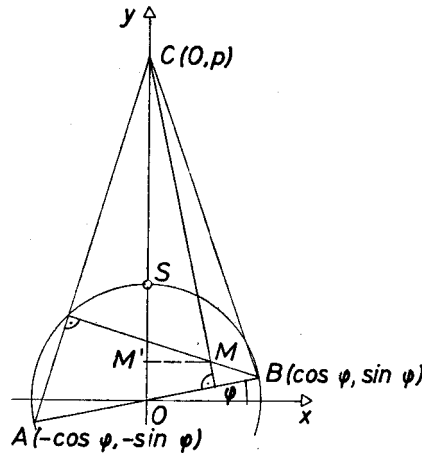


Előrebocsátjuk, hogy a súlyvonalat úgy értjük, hogy a háromszög csúcsából indul és halad a szemben levő oldal felezőpontja felé. Eszerint az értelmezés szerint az állításban szereplő vetület az oldalhoz van közelebb.

Az állítást koordináta-geometriai úton bizonyítjuk az ABC háromszög CO súlyvonalára, ahol O az origó és C a $(0, p)$ pont ($p > 0$). Legyen még az OB szakasz hossza 1 egység, az x tengellyel bezárt szöge $\varphi (\neq \pm 90^\circ)$. Ekkor $B(\cos \varphi, \sin \varphi)$, tehát $A(-\cos \varphi, -\sin \varphi)$.



Elég lesz meghatároznunk az M magasságpont ordinátáját (második koordinátáját), ez lesz egyszerre mind az M' pontnak, az állításban szereplő vetületnek az ordinátája is. Felírjuk a B és a C csúcsra illeszkedő magasságvonal egy-egy normálvektorát :

$$\overrightarrow{AC}(\cos \varphi, p + \sin \varphi), \quad \text{ill.} \quad \overrightarrow{OB}(\cos \varphi, \sin \varphi).$$

Így e két magasságvonal egyenlete abból, hogy átmegy B -n, ill. C -n:

$$\begin{aligned} x \cdot \cos \varphi + y(p + \sin \varphi) &= \\ \cos^2 \varphi + p \sin \varphi + \sin^2 \varphi, \end{aligned}$$

és

$$x \cdot \cos \varphi + y \cdot \sin \varphi = p \cdot \sin \varphi.$$

Az egyenletrendszerből $y = \frac{1}{p}$ adódik. M' tehát a CO súlyvonalat

$$CM' : M'O = \left(p - \frac{1}{p} \right) : \frac{1}{p}, \text{ azaz}$$

$$(1) \quad CM' : M'O = (p^2 - 1) : 1$$

arányban osztja ketté. Ez p minden megengedett értékére érvényes.

a) Ha mármint azt kívánjuk, hogy az A és B csúcsokból kiinduló súlyvonalak merőlegesen álljanak egymásra, vagyis az $S\left(0, \frac{p}{3}\right)$ súlypontnál $ASB \sphericalangle = 90^\circ$ legyen, akkor S rajta van az AB szakasz Thalész-körén, tehát $OS = OB = 1$, vagyis $p = 3$. Ekkor (1)-ben $p^2 - 1 = 8$, tehát M' a C -ből kiinduló súlyvonalat $8 : 1$ arányban osztja ketté, az állításbeli feltétel *szükséges*.

b) Induljunk ki most abból, hogy M' a CO súlyvonalat $8 : 1$ arányban osztja ketté. Ekkor M' második koordinátája $\frac{1}{9}p$. Ugyanez a koordináta, amint azt megállapítottuk, $\frac{1}{p}$. Ebből következik – mivel p pozitív, – hogy $p = 3$. A háromszög súlypontja ekkor $S(0, 1)$. Ez rajta van az AB oldal Thalész-körén, és nem esik egybe sem A -val, sem B -vel, ezért az SA, SB egyenesek merőlegesek egymásra. A feltétel tehát *elegetős* is. Ezzel a bizonyítást befejeztük.

Megjegyzés. Figyeljünk fel arra, milyen ügyesen helyezte bele a megoldás az alakzatot a koordináta-rendszerbe ! Elkerülte ezt a csábítást : origónak venni S -et és a tengelyekre tenni az A, B csúcsokat, ami pedig a megfordításhoz már nem alkalmas. Ezenkívül (1)-ben – nyelvtanilag – csak az *alany* szerepel, az M' pont osztásaránya. Ezért lehetett oda-vissza felhasználni (1)-et.