

I. megoldás. Legyen $n = 2^m$ (m pozitív egész) és $2 \leq k \leq 2^m - 1$ egész. Ekkor

$$(1) \quad \binom{n}{k} = \binom{2^m}{k} = \frac{2^m(2^m-1) \dots (2^m-k+1)}{k!} = \\ = \frac{2^m}{k} \cdot \frac{2^m-(k-1)}{k-1} \cdot \frac{2^m-(k-2)}{k-2} \cdot \dots \cdot \frac{2^m-1}{1}.$$

Ez a szám biztosan egész. Egyszerűsítsük gondolatban a törtet úgy, hogy először a kettő hatványaival osszunk! Ha l páratlan, akkor 2^m-l is páratlan, és így $\frac{2^m-l}{l}$ -nek sem a számlálójában, sem pedig a nevezőjében nincs 2-es tényező.

$2^m-2, 2^m-6, 2^m-10, \dots$ páros, de négygyel nem osztható, így $\frac{2^m-2}{2}, \frac{2^m-6}{6}, \frac{2^m-10}{10}, \dots$ 2-vel való egyszerűsítés után rendre két páratlan szám hányadosa lesz.

Általában is igaz, hogy ha $1 \leq l < 2^m$, akkor l és 2^m-l kettőnek ugyanazzal a hatványával osztható. (Ha ugyanis 2^i osztja l -et, akkor $l < 2^m$ miatt $2^i < 2^m$, tehát $i < m$, s így 2^i osztja 2^m -et is, tehát (2^m-l) -et is. Ha pedig 2^i osztja (2^m-l) -et, akkor osztja $2^m - (2^m-l) = l$ -et is.)

A $\frac{2^m-l}{l}$ tört tehát általában is egyszerűsíthető úgy, hogy a számlálóban és a nevezőben is páratlan szám maradjon, feltéve, hogy $1 \leq l < 2^m$. (1) jobb oldalán így a $\frac{2^m-(k-1)}{k-1}, \frac{2^m-(k-2)}{k-2}, \dots, \frac{2^m-1}{1}$ törtek mindegyike két páratlan szám hányadosává egyszerűsíthető ($1 \leq k-1 < 2^m$). Végül $1 \leq k < 2^m$ miatt k biztosan kettőnek m -nél kisebb kitevőjű hatványával osztható, tehát a $2^m/k$ tört egyszerűsítése után a számlálóban marad legalább egy 2-es tényező. Vagyis $\binom{2^m}{k}$ -ban $2 \leq k < 2^m$ esetén kettő minden lehetséges hatványával egyszerűsítve a nevező páratlan lesz, a számláló pedig páros.

Folytassuk az egyszerűsítést a 2-nél nagyobb prímek megfelelő hatványával! Miután 2-vel a továbbiakban már nem osztunk, az eredményül kapott egész szám páros.

Megmutattuk tehát, hogy $\binom{2^m}{k}$ biztosan páros, ha $2 \leq k < 2^m$.

$k=1$ esetben $\binom{2^m}{k} = \binom{2^m}{1} = 2^m$ nyilván páros. Ezzel az állítást beláttuk.

Bebizonyítjuk, hogy az állítás fordítottja is igaz: ha n nem kettőhatvány, akkor van olyan $1 \leq k < n$, amelyre $\binom{n}{k}$ nem páros. Ha n nem kettőhatvány, akkor a számelmélet alaptétele szerint $n = 2^m p$ alakba írható, ahol $m \geq 0$, p pedig 1-nél nagyobb páratlan szám. Ha most $k = 2^m$, akkor

$$(2) \quad \binom{n}{k} = \binom{2^m \cdot p}{2^m} = \frac{2^m \cdot p \cdot (2^m \cdot p - 1) \cdot \dots \cdot (2^m \cdot p - 2^m + 1)}{2^m \cdot (2^m - 1) \cdot \dots \cdot 1} = \\ = \frac{2^m \cdot p}{2^m} \cdot \frac{2^m \cdot p - 1}{2^m - 1} \cdot \dots \cdot \frac{2^m \cdot p - l}{2^m - l} \cdot \dots \cdot \frac{2^m \cdot p - 2^m + 1}{1}.$$

Most azt használjuk fel, hogy $2^m p - l$ és $2^m - l$ törzstényezősz felbontásában a 2 ugyanazon hatványon fordul elő, ha $0 \leq l < 2^m$. Ez az $l=0$ esetben nyilvánvaló; hisz a p páratlan. A megoldás első felében láttuk, hogy l és 2^m-l 2-nek ugyanazzal a hatványával oszthatók. Megmutatjuk, hogy $2^m p - l$ prímtényezősz felbontásában is ez a 2-hatvány szerepel.

Ha $2^i | l$, akkor $2^i < 2^m$ és így $2^i | 2^m$, tehát $2^i | 2^m - l$ és $2^i | 2^m p - l$. Megfordítva, ha $2^i | 2^m p - l$, akkor $i < m$. Ellenkező esetben ugyanis $2^m | 2^m p - l$ és ebből $2^m | l$ következne, ami $0 < l < 2^m$ miatt nem lehet. Így viszont $2^i | 2^m p - l$ -ből $2^i | 2^m p$ miatt valóban $2^i | l$ adódik.

Azt kaptuk, hogy (2)-ben a $\frac{2^m \cdot p - l}{2^m - l}$ törtek mindegyike páratlan számok hányadosává egyszerűsíthető, és mivel a törtek szorzata, $\binom{n}{k}$ egész, ebben az esetben $\binom{n}{k}$ páratlan.

II. megoldás. A binomiális együtthatók kombinatorikai jelentését használjuk ki a megoldásban. Először m -re vonatkozó teljes indukcióval megmutatjuk, hogy ha $1 \leq k < 2^m$, akkor $\binom{2^m}{k}$ páros. Ha $m=0$, akkor az állítás üres,

ha pedig $m=1$, akkor csak $k=1$ jöhet szóba és $\binom{2^1}{1} = 2$ páros.

Tekintsük most a $\binom{2^{j+1}}{k}$ számot ($1 \leq k < 2^{j+1}$). Ez azt mutatja meg, hogy hányféleképpen választható ki egy 2^{j+1} elemű A halmazból k elem. Osszuk A -t két egyenlő elemszámú, 2^j elemű A_1 és A_2 halmazra!

A -ból úgy választhatunk ki k elemet, hogy A_1 -ből 0, A_2 -ből pedig k elemet választunk ki – ez összesen $\binom{2^j}{0}$.
 $\binom{2^j}{k} = \binom{2^j}{k}$ -féleképpen tehető meg¹ – és általában, A_1 -ből i darabot, A_2 -ből pedig $(k - i)$ darabot – ami összesen $\binom{2^j}{i} \cdot \binom{2^j}{k-i}$ -féleképpen lehetséges. Azt kapjuk, hogy

$$(3) \quad \binom{2^{j+1}}{k} = \binom{2^j}{0} \cdot \binom{2^j}{k} + \binom{2^j}{1} \cdot \binom{2^j}{k-1} + \dots + \binom{2^j}{i} \cdot \binom{2^j}{k-i} + \dots + \binom{2^j}{k} \cdot \binom{2^j}{0}.$$

A fenti egyenlőség jobb oldalán az első és az utolsó tag egyenlő, összegük tehát páros. Minden további $\binom{2^j}{i} \binom{2^j}{k-i}$ szorzatban i és $k - i$ pozitív és mivel összegük kisebb 2^{j+1} -nél, legalább egyikük kisebb, mint 2^j . A szorzatnak ez a tényezője így az indukciós feltevés szerint páros, és így (3) jobb oldalán páros szám áll.

Az állítás megfordításának bizonyításához tegyük most fel, hogy az n nem 2-hatvány, és legyen 2^k az n -nél kisebb 2-hatványok legnagyobbika. Ekkor $n = 2^k + r$, ahol $0 < r < 2^k$.

Azt állítjuk, hogy $\binom{n}{r}$ páratlan. Az első rész bizonyításához hasonlóan osszuk most az n elemű A halmazt egy 2^k elemű A_1 és egy r elemű A_2 részre, majd csoportosítsuk az A halmaz r elemű részhalmazait aszerint, hogy hány A_2 -beli elemet tartalmaznak. Így a (3)-hoz hasonlóan kapjuk, hogy

$$(4) \quad \binom{n}{r} = \binom{2^k}{0} \binom{r}{r} + \binom{2^k}{1} \binom{r}{r-1} + \dots + \binom{2^k}{i} \binom{r}{r-i} + \dots + \binom{2^k}{r} \binom{r}{0}.$$

A fenti összeg első tagja 1 – ez annak felel meg, hogy az r elem mindegyike az A_2 halmazból való –, a további tagok első tényezője pedig $\binom{2^k}{i}$, ahol $0 < i < 2^k$, ami az állítás első része szerint páros. Ez azt jelenti, hogy ebben az esetben $\binom{n}{r}$ páratlan.

Megjegyzések. 1. Ismeretes, hogy $n!$ prímtényezős felbontásában a 2 kitevője $s(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{2^2} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{2^k} \right\rfloor + \dots$

Ha most $2^m \leq n < 2^{m+1}$, akkor $s(n) = \left\lfloor \frac{n}{2} \right\rfloor + \left\lfloor \frac{n}{4} \right\rfloor + \dots + \left\lfloor \frac{n}{2^m} \right\rfloor \leq n \left(\frac{1}{2} + \frac{1}{4} + \dots + \frac{1}{2^m} \right) = n \left(1 - \frac{1}{2^m} \right) \leq n - 1$, és egyenlőség pontosan akkor teljesül, ha $n = 2^m$.

Ez azt jelenti, hogy a $\binom{2^m}{k} = \frac{(2^m)!}{k!(2^m - k)!}$ tört számlálójának prímtényezős felbontásában $2^m - 1$, a nevezőben pedig legfeljebb $(2^m - k - 1) + (k - 1) = 2^m - 2$ darab kettős tényező szerepel, így az állítás első felének újabb bizonyítását kapjuk.

2. A feladat állítása igaz marad, ha a 2 helyére tetszőleges p prímszámot írunk.

3. A feladat kapcsolatban áll a tavalyi Kürschák-verseny 1. feladatával. A megoldásokat lásd a következő cikkben: *Surányi János*: Az 1984. évi Kürschák József matematikai tanulóverseny feladatainak megoldása KML 35 (1985) 51. oldal.

¹ Ha $k > n$, akkor megállapodás szerint $\binom{n}{k} = 0$.