

Keressük meg a B_2 ponton át azt az S síkot, amely párhuzamos az állításbeli síkkal. Ekkor S tartalmazza a B_2B_1 egyenest. S csak úgy lehet párhuzamos C_1C_2 -vel is – ez az egyenes a tetraéder $ADB = S_c$ lapsíkjában van –, ha S_c -t a C_1C_2 -vel párhuzamos egyenesben metszi.

Húzzuk meg tehát B_2 -n át (S_c -ben) a C_1C_2 -vel párhuzamos egyenest és jelöljük DB -vel való metszéspontját E -vel, ekkor a keresett sík 3 pontja B_1 , B_2 és E . És mivel az állításban szereplő harmadik egyenes, A_1A_2 , a tetraéder $BDC = S_a$ lapsíkjában van, azt kell csak belátnunk, hogy A_1A_2 és S -nek S_a -val való EB_1 metszévonal párhuzamosak.

Jelöljük a DA , DB , DC élek hosszát rendre a , b , c -vel és legyenek a D -nél az élek között levő szögek rendre $BDC \sphericalangle = \alpha$, $CDA \sphericalangle = \beta$, $ADB \sphericalangle = \gamma$. Ekkor szerkesztésünk folytán

$$DE = \frac{DC_2}{DC_1} \cdot DB_2 = \frac{\cos \alpha}{\cos \beta} b \cos \gamma,$$

$$DB_1 = b \cos \alpha, \quad \text{tehát}$$

$$DE : DB_1 = \cos \gamma : \cos \beta = a \cos \gamma : a \cos \beta = DA_1 : DA_2,$$

és e sor két végén álló aránypárok egyenlősége éppen azt jelenti, amit bizonyítani akartunk.

1985-04-159-1.eps

1. ábra

Első ábránkon – szokásosan – a könnyebben elképzelhető esetre mutattunk példát, vagyis ha α , β , γ mindegyike hegyesszög. Ha tompaszög is van köztük, akkor modell készítése és a D -ben összefutó 3 lapnak mint palástnak síkba való kiterítése kevésbé könnyíti az elképzelést, mert egyes vetületek, esetleg mind a 6, az illető oldalél D -n túli meghosszabbítására esnek. Második ábránkon α -t és γ -t tompaszögnek gondoltuk és a testet majdnem fölülnézetből szemléltük, az alakzat hozzánk legközelebbi pontjai B_1 , B_2 , C_2 és A_1 , ezek után hátrább következnek D , C_1 , A_2 és E . (Az ABC háromszög oldalait el is hagytuk, nincs szerepük.)

1985-04-159-2.eps

2. ábra

Elveszti érdekességét, sőt a tartalmát is az állítás, ha az A_1A_2 , B_1B_2 , C_1C_2 egyenesek közül kettőnek közös iránya, vagy ha valamelyik határozatlanná válik. Számításunk sem érvényes, ha csak egyik is 90° az α , β , γ közül. Például $\alpha = 90^\circ$ (és $\beta \neq 90^\circ$, $\gamma \neq 90^\circ$) esetén B_1 és C_2 egybeesik D -vel, tehát a B_1B_2 és C_1C_2 egyenesek egybeesnek DA -val (3. ábra, a DA él mentén felvágott palást kiterítése). Ha pedig $\alpha = \beta = 90^\circ \neq \gamma$, akkor C_1 és C_2 egybeesik, összekötő egyenesük határozatlan. Ilyen esetben a DA és DB élt alkotó lapok derékszöget zárnak be. Ezeket az eseteket eleve kizárta a feladat szövege.

1985-04-159-3.eps

3. ábra

Megjegyzés. Elhangzott olyan vélemény, hogy az OKTV I. fordulójának egyik feladata ¹ azonos a fenti feladattal. Az az igazság, hogy a forrás közös. Az valóban nem lényeges különbség, hogy ott olyan *egyenes* létezését kellett bizonyítani, amely bizonyos 3 egyenes mindegyikére *merőleges*, itt viszont egy síkét, amely 3 egyenes mindegyikével *párhuzamos*. De más-más egyenesek szerepelnek a folytatásban! A versenyfeladatban az *egyes lapsíkokban önállóan* keletkeznek a vetületeket összekötő a_1b_1 , b_2c_2 és c_3a_3 egyenesek (jobb megkülönböztetés végett, a szokásostól eltérően *kisbetűkkel* idéztük, a 4. ábrán is így szerepelnek), míg a mi feladatunkban pl. A_1A_2 *előkészítése*, a vetítés, az ADB , ill. ADC lapsíkokban történik, maga az egyenes pedig az A -val szemben levő BDC lapsíkokban van.

1985-04-160-1.eps

4. ábra

Természetes tehát, hogy a feladatunkban szereplő sík *nem azonos* (és nem is párhuzamos) a versenyfeladatban szereplő merőleges síkkal. A 4. ábra egy tetraéderpalást kiterítésén szemlélteti a vizsgált 3–3 egyenes különbözőségét. (Egymás után csatlakoznak az A_1A_2 , a_3c_3 , C_1C_2 , c_2b_2 , B_1B_2 , b_1a_1 szakaszok, és a két végpont azonos.)

¹„Az $SABC$ tetraéderen az ASB , BSC és CSA háromszögek egyike sem derékszögű. Az ASB lap S csúcsához nem tartozó magasságainak talppontja A_1 és B_1 , hasonlóképpen a BSC lap S csúcsához nem tartozó magasságainak talppontja B_2 és C_2 , végül a CSA lap S csúcsához nem tartozó magasságainak talppontja C_3 és A_3 . Bizonyítsuk be, hogy van olyan egyenes, amely merőleges az A_1B_1 , B_2C_2 és C_3A_3 egyenesek mindegyikére!”