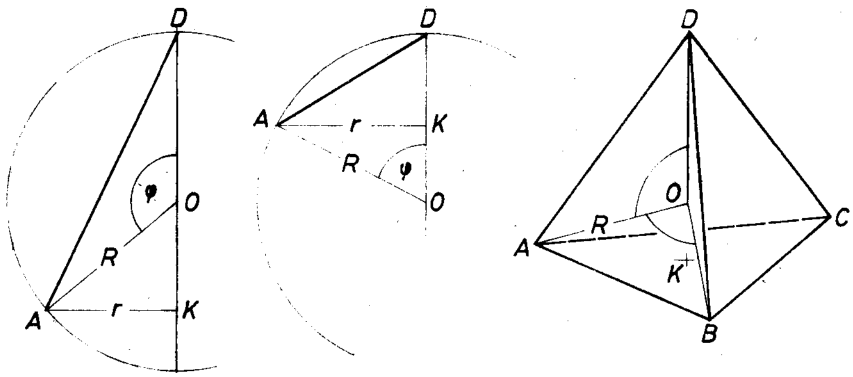
I. megoldás. Jelöljük a tetraéder körülírt gömbjét G-vel, sugarát R-rel, az ABC alapháromszög körülírt körét k-val, ennek középpontját K-val és sugarát r-rel, az AB alapélt a-val, az AOD szöget φ-vel. A k kör egyrészt G, másrészt az oldalélek egyenlősége folytán a D körüli DA sugarú gömb metszésvonala, ezért K rajta van a DO tengelyen és $r = R\ \sin\ \varphi$. Így a k-ba beírt szabályos háromszög oldalaként $a = \sqrt{3}r = \sqrt{3}R\ \sin\varphi$ adódik.



Az OAB háromszögből a cosinustétel alapján

$$\cos\ AOB\sphericalangle = \frac{2R^2 - AB^2}{2R^2} = 1 - \frac{3}{2}\sin^2\ \varphi = \frac{3}{2}\varphi - \frac{1}{2},$$

tehát az állítás bal oldala így írható:

$$\frac{3}{2}\cos^2\ \varphi + \cos\ \varphi - \frac{1}{2} = \frac{3}{2}\left(\cos\ \varphi + \frac{1}{3}\right)^2 - \frac{2}{3},$$

innen pedig az állítás helyessége nyilvánvaló. Egyenlőség $\cos\ \varphi = -1/3$ esetén teljesül, akkor O az $1/4$ részében vágja ketté a DK súlyvonalat, O a súlypont, tehát a tetraéder szabályos.

Megjegyzés. A megoldások legtöbbje az OK paraméter függvényében vizsgálta a bal oldal változását. Ezáltal a vizsgálat bonyolultabb lett, mint a fentiekben, ahol a második tagon mit sem kellett változtatni. Számos dolgozat hiányos is lett azáltal, hogy K helyzetét O-nak csak az egyik oldalán vizsgálta.

II. megoldás. Az állításban az O-ból a csúcsokba húzott sugarak közti szögekről van szó. Mind a 4 csúcsot és a nyilvánvaló szimmetriát figyelembe véve mindkétféle szög 3-szor fordul elő. Ezen az észrevételen alapul a következő bizonyítás:

$$(\overrightarrow{OA} + \overrightarrow{OB} + \overrightarrow{OC} + \overrightarrow{OD})^2 \geq 0.$$

Kifejtve

$$4R^2 + 6R^2\cos\ AOB\sphericalangle + 6R^2\ \cos\ AOD\sphericalangle \geq 0.$$

Innen egyszerű átrendezéssel adódik az állítás.