

Jelöljük A -val, B -vel az asztal kerületének azokat a pontjait, amelyekben a golyó egymás után visszaverődik, továbbá O -val a kör (az asztal) középpontját. A és B sorrendje fölcserélhető, hiszen a P , A , B , P sorrend esetében a rugalmas visszaverődés törvénye szerint az AB egyenes az AP -nek a tükörképe a kör AO szimmetriatengelyére, majd BP a BA képe BO -ra, ennél fogva az útvonal ugyanaz lesz, ha a golyót P -ből B felé indítjuk. Az is nyilvánvaló, hogy a golyó útvonala szimmetrikus a PO tengelyre, tehát $AB \perp PO$.

1985-04-156-1.eps

1. ábra

Legyen AB felezőpontja F , továbbá $OP = p$, $OF = x$, a feladat szerint $OA = r = 1$ (méter) és $PAO \sphericalangle = OAB \sphericalangle = \alpha$, $OPA \sphericalangle = 90^\circ - 2\alpha$.

Az OPA háromszögben a sinustétel alapján

$$\begin{aligned} OA \sin \alpha &= OP \sin OPA \sphericalangle, & r \sin \alpha &= p \cos 2\alpha = p(1 - 2\sin^2 \alpha), \\ 2p \sin^2 \alpha + r \sin \alpha - p &= 0, & \sin \alpha &= \frac{1}{4p}(-r \pm \sqrt{r^2 + 8p^2}) = \frac{OF}{r}. \end{aligned}$$

Számadatainkkal az egyenlet pozitív gyöke $\sin \alpha = (\sqrt{57} - 5)/8$. A másik gyök negatív, mert az ismeretlent nem tartalmazó tag ellentett jelű $\sin^2 \alpha$ együtthatójával, számunkra nem jelent megoldást. A pozitív gyök mellett is csak az felel meg, ha α hegyesszög, így $\alpha = 18^\circ 35' 10''$ és $OF = 31,87$ cm.

A golyó további útján jelöljük a visszaverődési pontokat $A_3, A_4, \dots, A_{10}, A_{11}$ -gyel, hozzájuk véve legyen $A_1 = A$ és $A_2 = B$. Helyzetüket az OP alapisírtól mért forgásszöggel jellemezzük. OA_1 -re $\varphi_1 = 90^\circ + \alpha$, minden további sugár esetére φ növekedése $A_i OA_{i+1} \sphericalangle = AOB \sphericalangle = 180^\circ - 2\alpha$, tehát

$$\varphi_i = (2i - 1) \cdot 90^\circ - (2i - 3) \alpha.$$

Eszerint 360° megfelelő többszörösét levonva

$$\varphi_{10} = -45^\circ 57' 49'' \quad \varphi_{11} = 96^\circ 51' 50''.$$

(OA_{11} mintegy 12° -kal van visszafelé elfordulva OA_1 -től (2. ábra), OA_6 pedig 6° -kal; a golyó nagyjából egy szabályos csillagötszög kerületét írja le.)

1985-04-156-2.eps

2. ábra

Jelöljük OP és $A_{10}A_{11}$ metszéspontját M -mel és P vetületét az $A_{10}A_{11}$ útszakaszra P' -vel. Ekkor $PP' = PM \cos \gamma$, ahol $\gamma = (\varphi_{10} + \varphi_{11})/2 = 25^\circ 27'$ és $PM = OP - OM$, a levonandót az MOA_{11} háromszögből számolhatjuk:

$$OM = OA_{11} \cdot \frac{\sin 18^\circ 35' 10''}{\sin(90^\circ - \gamma)} = 0,353,$$

hiszen $MA_{11}O \sphericalangle = \alpha$. Ennél fogva

$$PP' = (0,4 - 0,353) \cos \gamma = 0,0425 \text{ m, vagyis } PP' = 4,25 \text{ cm.}$$

Megjegyzések. 1. Többen azt a triviális, semmitmondó megállapítást is megoldásnak tekintették, hogy a golyót a P -n átmenő körátmérő mentén kell meglökni. Így már az első visszaverődés után is áthalad P -n, minden további menetben is, és a kért távolság akárhányszor is megadható. *Nem vitatkozunk ezzel a felfogással.*

2. Többen abból indultak ki, hogy az útvonalnak szabályos csillagötszögnek „kell” lennie, tehát az $OP = 0,4$ m adat „hibás”. Az igaz, hogy az adat a $\cos 72^\circ / \cos 36^\circ = (3 - \sqrt{5})/2 = 0,382 \dots$ szám kerekítéséből származik – ennyire van a középponttól a szabályos csillagötszög két oldalának „belső” metszéspontja. A kerekítéssel tudatosan „kicsit elrontottuk” a szabályosságot. A világ nemcsak szabályos dolgokból áll, sőt a legtöbb dolog távol áll mindennemű idealizált szabályosságtól.