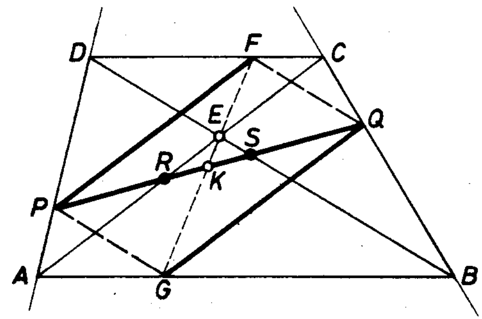
I. megoldás. a) Húzzuk meg a BD átlóval párhuzamos egyenest Q-n és P-n át, és messe ez a CD, ill. AB egyenest F-ben, ill. G-ben.



1. ábra

Ekkor a párhuzamos szelők tétele és a föltevés szerint

$$\frac{CF}{FD} = \frac{CQ}{QB} = \frac{AP}{PD} = k.$$

Ennélfogva ugyanezen tétel megfordítása szerint $PF||AC$, továbbá ugyanígy $QG||AC$. Ezek szerint a $PFQG$ négyszög paralelogramma, és $AG : GB = k$.

Jelöljük az átlók metszéspontját a paralelogrammában K-val, az eredeti trapézban E-vel. ECD és EAB az E centrumra nézve hasonló helyzetű háromszögek, csúcsaik a felsorolás rendjében felelnek meg egymásnak, ennélfogva F és G pontjaik is egymás megfelelői. Ezért az FG átló E-n is átmegy.

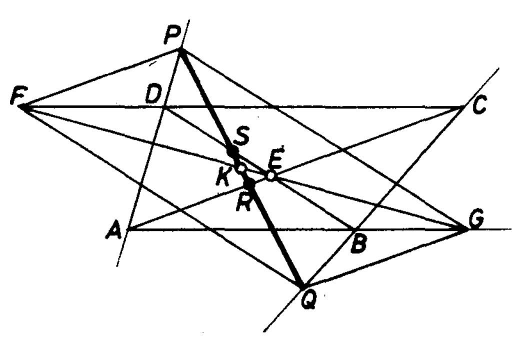
Így pedig a PFQ és RES háromszögek K-ra mint centrumra nézve hasonló helyzetűek. Mivel K felezi PQ-t, azért az RS szakaszt is felezi, tehát R és S a PQ egyenesen K-ra nézve szintén szimmetrikus helyzetű pontok, és így $PR = QS$. Ezt kellett bizonyítanunk.

Ha $CD = AB$, akkor P és Q egymás tükörképei E-re, ekkor R és S egybeesik E-vel.

b) Ha P az AD szakasz valamelyik meghosszabbításán van, akkor az AP és PD szakaszok ellentétes irányúak, tehát az $AP : PD = k$ arány értéke negatív lesz. És pedig amint P az A-n túl távolodik, k a 0-tól szigorúan monoton csökken, de nem éri el a (-1)-et, ha pedig D-n túl távolodik P, akkor szigorúan monoton nő, de nem éri el a (-1)-et. Emiatt a föltételezett egyenlőség szerint Q a C-n, ill. B-n túli meghosszabbításon lesz. Megmarad, hogy A és C egymás megfelelői E-re nézve, ugyanúgy B és D is, így pedig bizonyításunk betűről betűre érvényes marad. Ha speciálisan P-t A-ban választjuk, akkor Q a C-ben lesz, ugyanígy egy megfelelő helyzet P, Q-ra D és B, de ilyenkor az állításnak nincs tartalma, mert R és S egyike határozatlan.

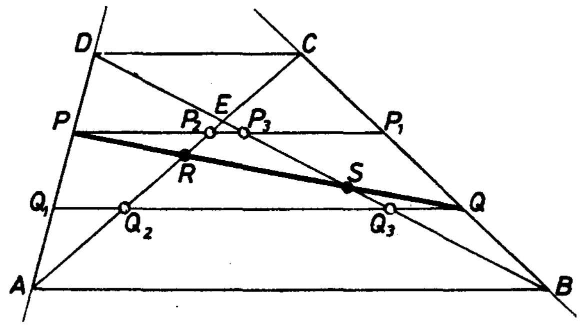
II. megoldás. Mindjárt azt látjuk be, hogy az állítás az AD egyenes tetszőleges P pontjára igaz, ha az arányokat előjellel együtt értjük. Láttuk az I. megoldás b) részében, hogy az így vett arány értéke egyértelműen meghatározza az R, illetve S pont helyzetét a PQ egyenesen is, ezért a következő egyenlőséget bizonyítjuk:

$$\frac{PR}{RQ} = \frac{QS}{SP}.$$



2. ábra

Így R és S a PQ szakasz felezőpontjára nézve tükrös pontok, amiből az állítás következik.



3. ábra

Húzzuk meg a párhuzamosokat AB-vel P-n és Q-n át, és jelöljük a szemben levő szárra való metszéspontjukat P_1-gyel, ill. Q_1-gyel, továbbá AC-vel és BD-vel való metszéspontjukat P_2, P_3-mal, ill. Q_2, Q_3-mal (3. ábra).

Az SPP_3 és SQQ_3 hasonló háromszögekből, majd a DPP_3, DAB és a BQQ_3, BCD párokból

$$\frac{SP}{SQ} = \frac{PP_3}{QQ_3} = \frac{AB \cdot \frac{DP}{DA}}{CD \cdot \frac{BQ}{BC}} = \frac{AB}{CD} \cdot \frac{\frac{BC}{BQ}}{\frac{DA}{DP}} = \frac{AB}{CD} \cdot \frac{1 + \frac{CQ}{QB}}{1 + \frac{AP}{PD}} = \frac{AB}{CD},$$

egyenlő a trapéz párhuzamos oldalainak arányával. E bizonyításban P, Q, A, B, C, D helyére sorra P, Q, C, D, A, B-t írva és a 3-as indexek helyére 2-est, S helyére R-et,

$$\frac{RP}{RQ} = \frac{DC}{AB} = 1 : \frac{SP}{SQ},$$

és ezt akartuk bizonyítani.

Nem létezik a felhasznált SPP_3 és SQQ_3 háromszög, illetve RPP_2 és RQQ_2, ha a két segédpárhuzamos egybeesik. Ekkor azonban P és Q nyilvánvalóan felezik a szárakat, a föltételbeli arányok közös értéke 1, és az állítás szinte semmitmondó.

Eredményünk így is kimondható : mialatt P az AD száregyenesen halad, és Q a CB egyenesnek az aránypár által meghatározott pontja, az SP/SQ és az RQ/RP arányok értéke közös állandó, nem függ P helyzetének megválasztásától.